Теорема о трех центрах гомотетии

Теорема. Если композиция трех гомотетий является тождетственным преобразованием плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

1. На плоскости даны три непересекающихся неравных круга. Докажите, что

(a) точки пересечения общих внешних касательных лежат на одной прямой;

(b) точка пересечения общих внешних касательных к одной паре кругов и точки пересечения общих внутренних касательных к двум другим парам кругов лежат на одной прямой.

2. На плоскости зафиксированы две неравные окружности ω_1 и ω_2. Произвольная окружность ω касается их внутренним образом в точках A и B. Докажите, что все прямые AB проходят через одну точку, не зависящую от выбора ω.

3. Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах четырехугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна PQ. Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

4. Дан треугольник ABC. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC, а также описанной окружности внутренним образом в точке A'. Докажите, что прямая AA' и две ей аналогичные пересекаются в одной точке.

5. В выпуклом четырёхугольнике пересекли пары противоположных сторон. Через эти две точки провели по два луча, разбивающие исходный четырёхугольник на 9 меньших четырёхугольников. Оказалось, что в 3 из этих 9 меньших четырёхугольников, имеющих вершины A, B и C, можно вписать окружность. Докажите, что тогда и в четырёхугольник, имеющий вершину D, тоже можно вписать окружность.

6. Окружность ω лежит внутри окружности Ω. Докажите, что все окружности, касающиеся ω внешним образом и Ω внутренним образом, имеют радикальный центр.