Многочлены над $\mathbb{F}_p$ и не только

Мы знаем, что и многочлены над $\mathbb{F}_p$, и многочлены над $\mathbb{Q}$, и многочлены над $\mathbb{R}$ можно делить с остатком. Иными словами, для любых многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ существуют многочлены $S(x)$ и $R(x)$ такие, что $\deg R(x) < \deg Q(x)$ и $P(x) = Q(x)S(x) + R(x)$.

1. Даны многочлены $A(x), B(x)$ (над $\mathbb{F}_p$, или над $\mathbb{Q}$, или над $\mathbb{R}$).

(a) Линейное представление НОД. Докажите, что существуют многочлены $U(x), V(x), D(x)$ (над $\mathbb{F}_p$, или над $\mathbb{Q}$, или над $\mathbb{R}$) такие, что $A(x)U(x) + B(x)V(x) = D(x)$, причём и $A(x)$, и $B(x)$ делятся на $D(x)$.
Указание: воспользуйтесь индукцией по $\deg A(x) + \deg B(x)$.

(b) Пусть $A(x)$ и $B(x)$ делятся на многочлен $C(x)$. Докажите, что тогда $D(x)$ делится на $C(x)$.

(c) Докажите, что $D(x)$ — это многочлен наибольшей степени такой, что $A(x)$ и $B(x)$ делится на $D(x)$.

Определение. Для пары многочленов $A(x), B(x)$ многочлен $D(x)$ наибольшей степени такой, что и $A(x)$, и $B(x)$ делятся на $D(x)$, называется их *наибольшим общим делителем.* Из задачи 1 следует, что он определён с точностью до домножения на ненулевую константу.

Определение. Назовём многочлен $P(x)$ (над $\mathbb{F}_p$, или над $\mathbb{Q}$, или над $\mathbb{R}$) *неприводимым*, если $\deg P(x) > 0$ и его нельзя представить в виде произведения многочленов меньшей степени.

2. Даны многочлены $A(x), B(x), P(x)$ (над $\mathbb{F}_p$, или над $\mathbb{Q}$, или над $\mathbb{R}$). Известно, что многочлен $P(x)$ неприводим, а произведение $A(x) \cdot B(x)$ делится на $P(x)$. Докажите, что $A(x)$ или $B(x)$ делится на $P(x)$.

3. Докажите, что неприводимых многочленов над $\mathbb{F}_p$ бесконечно много.

4. Докажите, что любой многочлен (над $\mathbb{F}_p$, или над $\mathbb{Q}$, или над $\mathbb{R}$) можно представить в виде произведения неприводимых единственным (с точностью до перестановки и домножения на ненулевые константы) способом.

5. Известно, что многочлены $A(x), B(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ взаимно просты (то есть их НОД равен 1). Для любого неконстантного $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ докажите, что $A(P(x))$ и $B(P(x))$ взаимно просты.

6. Пусть p — простое число, a не делится на p.

(a) Докажите, что если многочлены $P(x) \in \mathbb{F}_p[x]$ и $P(x+1)$ совпадают, то $\deg P(x) \geqslant p$.

(b) Докажите, что многочлен $f(x) = x^p - x - a \in \mathbb{F}_p[x]$ неприводим.

7. Простое число $p > 2$. Мария Юрьевна выписала на доску все многочлены над $\mathbb{F}_p$ степени не больше 10, имеющие ненулевой свободный член. Саша перемножил все эти многочлены и выписал результат себе на листочек. Найдите коэффициент при x^9 у выписанного Сашей многочлена.