

Бинарный куб.

Определение. *Бинарным кубом* или *булевым кубом* размерности n называется граф, вершины которого — все возможные последовательности из нулей и единиц, а соединены ребром те из них, которые отличаются в одном разряде.

1. Сколько у n -мерного булева куба
 - (a) рёбер;
 - (b) циклов длины 4.
2. Докажите, что можно записать в строку все бинарные слова длины 9 так, чтобы первым словом было 000000000, последним — 111111111, и любые соседние строчки отличались ровно в одной позиции.
3. При каких n весь n -мерный куб $2 \times 2 \times \dots \times 2$ без двух противоположных клеток можно разбить на доминошки $2 \times 1 \times 1 \times 1 \dots \times 1$? Доминошки можно вращать любым из n способов.
4. Пусть S — 2018-элементное множество, n — целое число, и $0 \leq n \leq 2^{2018}$. Докажите, что все подмножества S можно раскрасить в черный и белый цвета с соблюдением следующих условий:
 - объединение любых двух белых подмножеств — белое;
 - объединение любых двух черных подмножеств — черное;
 - белых подмножеств ровно n .

Определение. Назовём k -тым слоем бинарного куба множество вершин, в которых ровно k единиц. *Цепью* назовём путь в кубе, каждая следующая вершина которого находится в слое с меньшим номером, чем предыдущая. Назовём цепь *симметричной*, если сумма номеров слоёв начала и конца равна n .

5. **Теорема Шпернера.** В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном.
 - (a) Докажите, что можно отметить $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ подмножеств;
 - (b) Докажите по индукции по n , что можно разделить все элементы на цепочки, симметричные относительно центрального слоя;
 - (c) Докажите, что можно разделить все элементы на $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$ цепочек, используя лемму Холла.