

## Бинарный куб.

**Определение.** *Бинарным кубом* или *булевым кубом* размерности  $n$  называется граф, вершины которого — все возможные последовательности из нулей и единиц, а соединены ребром те из них, которые отличаются в одном разряде.

1. Сколько у  $n$ -мерного булева куба
  - (a) рёбер;
  - (b) циклов длины 4.
2. Докажите, что можно записать в строку все бинарные слова длины 9 так, чтобы первым словом было 000000000, последним — 111111111, и любые соседние строчки отличались ровно в одной позиции.
3. При каких  $n$  весь  $n$ -мерный куб  $2 \times 2 \times \dots \times 2$  без двух противоположных клеток можно разбить на доминошки  $2 \times 1 \times 1 \times 1 \dots \times 1$ ? Доминошки можно вращать любым из  $n$  способов.
4. Пусть  $S$  — 2018-элементное множество,  $n$  — целое число, и  $0 \leq n \leq 2^{2018}$ . Докажите, что все подмножества  $S$  можно раскрасить в черный и белый цвета с соблюдением следующих условий:
  - объединение любых двух белых подмножеств — белое;
  - объединение любых двух черных подмножеств — черное;
  - белых подмножеств ровно  $n$ .

**Определение.** Назовём  $k$ -тым слоем бинарного куба множество вершин, в которых ровно  $k$  единиц. *Цепью* назовём путь в кубе, каждая следующая вершина которого находится в слое с меньшим номером, чем предыдущая. Назовём цепь *симметричной*, если сумма номеров слоёв начала и конца равна  $n$ .

5. **Теорема Шпернера.** В множестве из  $n$  элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном.
  - (a) Докажите, что можно отметить  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  подмножеств;
  - (b) Докажите по индукции по  $n$ , что можно разделить все элементы на цепочки, симметричные относительно центрального слоя;
  - (c) Докажите, что можно разделить все элементы на  $C_n^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$  цепочек, используя лемму Холла.