Гомотетия

1. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM, DAM образуют квадрат.

2. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY. Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

3. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_a, касающиеся друг друга в точке S. Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A; окружность ω_b касается прямой b в точке B. Докажите, что точка S лежит на отрезке AB.

4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A. Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках B и C и касается второй окружности в точке D. Докажите, что AD — биссектриса внешнего угла BAC.

5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и BCD равны. Докажите, что радиусы вневписанных окружностей этих треугольников напротив вершины B тоже равны.

6. На плоскости фиксированы окружность ω, точка A на ней и T внутри. Рассматриваются всевозможные хорды BC, проходящие через T. Найдите ГМТ

(a) точек пересечения медиан треугольника ABC;

(b) ортоцентров треугольника ABC.

7. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC, а A', B', C' — середины дуг описанной окружности.

(a) Докажите, что прямые A_1A', B_1B' и C_1C' пересекаются в одной точке.

(b) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC. Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI.

8. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC, а ω — вневписанная окружность треугольника ABC, касающаяся отрезка AB. Общие внутренние касательные к окружностям (CKL) и ω пересекают прямую AB в точках P и Q. Докажите, что $AP = BQ$.