

Жадный алгоритм.

1. В графе 2000 вершин. Степень каждой вершины меньше 40. Докажите, что можно выбрать 50 вершин, попарно не соединённых друг с другом.
2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?
3. (а) На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается взять как можно больше сыра. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
(б) Петя и Вася съели весь сыр, кроме одного последнего кусочка. Его было решено разделить следующим образом: сначала Петя режет сыр на две части, затем Вася выбирает один из получившихся кусков и делит его ещё на два. Так продолжается до тех пор, пока на столе не окажется 5 кусков. После этого ребята по очереди забирают сыр себе, начиная с Пети. Какое наибольшее количество сыра может гарантировать себе каждый из мальчиков независимо от действий соперника?
4. Назовём число волшебным, если оно равно 2, или представляется в виде $3^a 5^b$, где a и b — целые неотрицательные. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных волшебных чисел.
5. Покажите, что любое целое неотрицательное число n может быть представлено в виде

$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3,$$

где x, y, z — целые числа такие, что $0 \leq x < y < z$.

6. (а) На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые — вверху?
(б) То же для доски 9×9 .
7. На плоскости размещено некоторое количество кругов, покрывающих площадь S . Докажите, что можно выбрать несколько попарно непересекающихся кругов с общей площадью хотя бы $\frac{S}{9}$.