Дострой и увидь

1. Точка P выбирается дуге BC остроугольного треугольника ABC, не содержащей точку A. Точка Q внутри треугольника такова, что $\angle ABQ = \angle PBC$ и $\angle ACQ = \angle PCB$. Докажите, что $AQ = PQ$.

2. Окружности ω_i при $i = 1, 2, 3, 4$ расположены на плоскости так, что любые две с соседними номерами касаются внешним образом (номера 4 и 1 также соседние). Докажите, что четыре точки касания образуют вписанный четырехугольник.

3. В остроугольном треугольнике ABC на строне AC выбрана точка P такая, что $2AP = BC$. Точки X, Y симметричны точке P относительно вершин A и C. Оказалось, что $BX = BY$. Чему может быть равен угол C исходного треугольника?

4. В ранвобедренном треугольнике $ABC(AB = BC)$ проведен луч ℓ из вершины B. На луче внутри треугольника взяты точки P, Q так, что $\angle BAP = \angle QCA$. Докажите, что $\angle PAQ = \angle PCQ$.

5. Внутри параллелограмма $ABCD$ выбрана точка E так, что $AE = DE$ и $\angle ABE = 90°$. Точка M — середина отрезка BC. Найдите угол $\angle DME$.

6. На сторонах AB и AC остроугольного треугольника BAC выбраны точки C_1 и B_1 соответсвенно. На отрезках BB_1 и CC_1 выбраны точки P и Q так, что $PQ \parallel BC$. На луче PC_1 за точку C_1 выбираются такая точка P_1, что $\angle PP_1A = \angle B$. Аналогично строится точка Q_1 на луче QB_1. Докажите, что точки P, Q, P_1 и Q_1 лежат на одной окружности.

7. На сторонах BC и AD вписанного четырехугольника $ABCD$ выбраны точки P и Q так, что окружность (APD) касается прямой BC, а окружность (BQC) касается прямой AD. Докажите, что прямая PQ образует равные углы с прямыми AD и BC.

8. В неравнобедренном треугольнике ABC отмечена точка M — середина отрезка BC и точка N — середина дуги BAC. Обозначим за I центр окружности, вписанной в треугольник. Докажите, что окружность MIN касается прямой AI.