Региональные мысли

1. Нарисуйте на клетчатой бумаге четырехугольник с вершинами в узлах, длины сторон которого — различные простые числа.

2. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD. Центр описанной окружности треугольника ABC лежит на прямой BD. Докажите, что центр описанной окружности треугольника ABD лежит на прямой AC.

3. На сторонах AB и BC параллелограмма $ABCD$ выбраны точки K и L соответственно так, что $\angle AKD = \angle CLD$. Докажите, что центр окружности, описанной около треугольника BKL, равноудален от A и C.

4. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть A_1P — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Серединный перпендикуляр к отрезку BC пересекает отрезок B_1C_1 в точке Q. Докажите, что четверка точек B, P, Q, C — коциклическая.

5. Дан прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C. Пусть BK — биссектриса этого треугольника. Окружность, описанная около треугольника AKB, пересекает вторично сторону BC в точке L. Докажите, что $CB + CL = AB$.

6. Остроугольный равнобедренный треугольник ABC ($AB = AC$) вписан в окружность с центром в точке O. Лучи BO и CO пересекают стороны AC и AB в точках B' и C' соответственно. Через точку C' проведена прямая ℓ, параллельная прямой AC. Докажите, что прямая ℓ касается окружности, описанной около треугольника $B'OC$.

7. В окружности ω с центром в точке O провели непересекающиеся хорды AB и CD так, что $\angle AOB = \angle COD = 120°$. Касательная к ω в точке A пересекает луч CD в точке X, а касательная к ω в точке B пересекает луч DC в точке Y. Прямая ℓ проходит через центры окружностей, описанных около треугольников DOX и COY. Докажите, что ℓ касается ω.

8. На стороне AC треугольника ABC отметили произвольную точку D. Пусть E и F — точки, симметричные точке D относительно биссектрис углов A и C соответственно. Докажите, что середина отрезка EF лежит на прямой A_0C_0, где A_0 и C_0 — точки касания вписанной окружности треугольника ABC со сторонами BC и AB соответственно.

9. Продолжения сторон AB и CD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P, а продолжения сторон AD и BC — в точке Q. Докажите, что биссектрисы углов APD и AQB пересекаются на прямой, соединяющей середины диагоналей четырехугольника.

10. Докажите, что сумма радиусов вневписанных окружностей остроугольного треугольника не меньше суммы длин медиан этого треугольника.