

Региональная геометрия

1. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60° . Обозначим за O , I и H центр описанной окружности, центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника. Докажите, что окружность (HOI) проходит через точку B .
2. Дан неравносторонний треугольник ABC , в котором $AB < AC$. Точка S — середина дуги BAC , точка P — проекция точки S на прямую AC . Докажите, что точка P делит пополам периметр ломанной BAC .
3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H . На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось что центр окружности (B_1HC_1) лежит на прямой BC . Докажите, что окружности (ABC) и (B_1HC_1) касаются.
4. Треугольник ABC вписан в окружность ω и описан вокруг окружности с центром в точке I . Прямые BI и CI пересекают ω в точках X и Y соответственно. Прямая ℓ проходит через точку I , касается окружности (XIY) и пересекает прямую XY в точке S . Докажите, что прямая SA касается окружности (ABC) .
5. Дан неравносторонний треугольник ABC , в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC . Точка O — центр окружности Ω , описанной около треугольника ABC . Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D . Докажите, что центр окружности BOD , лежит на прямой AC .
6. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P . Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD , параллельна прямой AD .
7. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P . На отрезке AD нашлась такая точка Q , что $BQ = CQ$. Докажите, что линия центров окружностей, описанных около треугольников AQC и BQD , перпендикулярна прямой PQ .
8. В неравностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса BL . Продолжение медианы, проведенной из вершины B , пересекает окружность (ABC) в точке D . Через центр окружности (BDL) проведена прямая ℓ , параллельная AC . Докажите, что ℓ касается (ABC) .