

Разной по алгебре и ТЧ

1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.
2. Для любых натуральных a, b и c докажите неравенство

$$(a, b - 1)(b, c - 1)(c, a - 1) \leq ab + bc + ca.$$

Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y .

3. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр числа n^3 ?
4. В клетках таблицы $3 \times n$ записаны натуральные числа. В каждой из трёх строчек встречается по одному разу числа $1, 2, \dots, n$. Для каждого столбца сумма попарных произведений стоящих в нём трех чисел кратна n . При каких n это возможно?
5. Блок из N подряд идущих натуральных чисел называется хорошим, если произведение каких-то двух из них делится на сумму остальных. Для каких N существует бесконечно много хороших блоков?
6. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют условию $xy + xz + yz = 3$. Докажите, что

$$x(2 - y^2)(2 - z^2) + y(2 - x^2)(2 - z^2) + z(2 - x^2)(2 - y^2) \geq 3.$$

7. Артём выписал на доску n различных чисел: x_1, \dots, x_n . Для каждой пары x_i, x_j Артём посчитал значение $\frac{x_i - x_j}{i - j}$, после чего все результаты перемножил. Докажите, что у него получилось целое число.