

## Конструктивы в алгебре и ТЧ

1. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 - z^2 = 2023$  имеет бесконечно много решений в целых числах.
2. Существуют ли 100 рациональных чисел таких, что произведение любых двух не является целым числом, а произведение любых трёх является целым?
3. Сколько чисел, меньших 2023, представляются в виде

$$n = \text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(a, c),$$

где  $a, b, c$  некоторые натуральные числа?

4. Докажите, что найдутся 2023 таких целых числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ , по модулю больших 100000, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2023}} = \frac{1}{a_1 \dots a_{2023}}.$$

5. Докажите, что у уравнения

(а)  $x^{10} + y^{10} + z^{10} = w^{11}$ ;

(б)  $x^9 + y^{10} = z^{11}$

есть решение в натуральных числах.

6. Докажите, что из чисел от 1 до 100000 можно выбрать 1000 чисел так, чтобы никакие три из них не образовывали арифметическую прогрессию.
7. Числа  $m$  и  $n$  назовём *похожими друг на друга*, если у них совпадают множества простых делителей. Числа  $m$  и  $n$  назовём *очень похожими*, если во-первых,  $m$  и  $n$  похожи друг на друга, а во-вторых,  $m + 1$  и  $n + 1$  похожи друг на друга. Докажите, что пар очень похожих натуральных чисел бесконечно много.