

## Комбинаторный разбой

1. Дана доска  $15 \times 15$ . Некоторые пары центров соседних по стороне клеток соединили отрезками так, что получилась замкнутая несамопересекающаяся ломаная, симметричная относительно одной из диагоналей доски. Докажите, что длина ломаной не больше 200.
2. Какое наименьшее число выстрелов надо сделать, чтобы гарантированно подбить четырехпалубный корабль на поле  $10 \times 10$  для игры в морской бой?
3. Клетки таблички  $m \times n$  требуется покрасить в два цвета. При этом для каждой клетки число клеток ее цвета в одной строке с ней должно быть равно числу клеток ее цвета в одном столбце с ней. Для каких пар  $(m, n)$  такая раскраска возможна?
4. Каждый день Фрекен Бок выпекает квадратный торт размером  $3 \times 3$ . Карлсон немедленно вырезает себе из него четыре квадратных куса размером  $1 \times 1$  со сторонами, параллельными сторонам торта (не обязательно по линиям сетки  $3 \times 3$ ). После этого Малыш вырезает себе из оставшейся части торта квадратный кусок со сторонами, также параллельными сторонам торта. На какой наибольший кусок торта может рассчитывать Малыш вне зависимости от действий Карлсона?
5. Дано натуральное число  $n > 2$ . Рассмотрим все покраски клеток доски  $n \times n$  в  $k$  цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все  $k$  цветов встречаются. При каком наименьшем  $k$  в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?
6. В некотором государстве было 2023 города, соединенных дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещенном проезде по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге заход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?
7. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером  $102 \times 102$  клеток и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.
8. Андрей пришел домой и понял, что не помнит код от замка в подъезде. Но он знает, что код — последовательность четырех цифр, каждая от 0 до 9. Замок откроется, как только набран правильный код, неважно, что Андрей нажимал перед этим. Сколько цифр придется ввести Андрею перед тем как гарантированно попасть домой?