

Комбинаторная геометрия. Координаты

1. На прямой выбраны несколько отрезков.
 - (a) Известно, что любые два отрезка пересекаются. Докажите, что можно отметить точку, принадлежащую всем отрезкам.
 - (b) Известно, что среди любых $k + 1$ отрезка найдутся два пересекающихся. Докажите, что можно отметить на прямой k красных точек так, чтобы любой из отрезков содержал какую-то красную точку.
2. На плоскости дано конечное множество многоугольников, каждые два из которых имеют общую точку. Докажите, что существует прямая, имеющая общие точки со всеми этими многоугольниками.
3. На плоскости выбраны несколько прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любые два таких прямоугольника пересекаются. Докажите, что все такие прямоугольники пересекаются в одной точке.
4. На плоскости рассматривается конечное множество равных, параллельно расположенных квадратов, причем среди любых $k + 1$ квадратов найдутся два пересекающихся. Докажите, что это множество можно разбить не более чем на $2k - 1$ непустых подмножеств так, что в каждом подмножестве все квадраты будут иметь общую точку.
5. На плоскости расположено n прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат. Известно, что любой прямоугольник пересекается хотя бы с $\frac{3}{4}n$ прямоугольниками. Доказать, что найдется прямоугольник, пересекающийся со всеми прямоугольниками.
6. На окружности длины $2n$ отмечены $2n$ точек, разбивающих её на дуги длины 1. Докажите, что среди любых $n + 1$ дуг с длинами $1, 2, \dots, n + 1$ и концами в отмеченных точках найдутся две, одна из которых содержится в другой.
7. На плоскости дано n точек и отмечены середины всех отрезков с концами в этих точках. Докажите, что различных отмеченных точек не менее $2n - 3$.
8. На плоскости нарисованы 100 кругов, любые два из которых имеют общую точку (возможно граничную). Докажите, что найдётся точка, принадлежащая не менее, чем пятнадцати кругам.