Соответствия

0. *Каких чисел трёхзначных чисел больше: тех, у которых средняя цифра больше обеих крайних, или тех, у которых средняя цифра меньше обеих крайних?.*

1. Рассматриваются всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2021, а также всевозможные треугольники, имеющие целочисленные стороны и периметр которых равен 2024. Каких треугольников больше?

2. Дана шахматная доска. Ее вертикали перенумерованы числами от 1 до 8, а горизонтали обозначены латинскими буквами от a до h. Рассматриваются покрытия доски доминошками. Каких разбиений больше — тех, которые содержат доминошку a1 - a2, или тех, которые содержат доминошку b2 - b3?

3. Является ли чётным число всех 20-значных натуральных чисел, не содержащих в записи нулей и делящихся на 101?

4. Докажите, что количество способов представить натуральное число n в виде суммы нескольких идущих подряд натуральных чисел равно количеству нечётных делителей n.

5. **(a)** Рассмотрим набор чисел $\{a_1, \ldots, a_{2n+1}\}$, где каждое равно ± 1 и сумма всех чисел набора равна единице. Докажите, что набор можно циклически сдвинуть так, что все частичные суммы $a_1, a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n+1}$ будут положительны.
(b) Сколько последовательностей $\{a_1, a_2, \ldots, a_{2n}\}$, состоящих из единиц и минус единиц, обладают тем свойством, что $a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n} = 0$, а все частичные суммы неотрицательны?
(c) Сколько существует способов расставить скобки в произведении $x_0 \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$ так, чтобы порядок умножений был полностью определен?

6. В школе учатся 400 человек, из них 200 двоечников и 200 отличников. На Новый Год Дед Мороз привез мешок, в котором есть 800 конфет «Миндаль Иванович». Он хочет раздать их все детям, причем каждый двоечник должен получить не больше одной конфеты, а каждый отличник — хотя бы 2 конфеты, причем четное количество. Директор школы решил, кроме того, поощрить отличников, приготовив 600 мандаринов, которые хочет раздать так, чтобы каждому отличнику досталось не менее одного. У кого больше способов раздать свои подарки?

7. На окружности отмечено $2N$ точек (N — натуральное число). Известно, что через любую точку внутри окружности проходит не более двух хорд с концами в отмеченных точках. Назовем паросочетанием такой набор из N хорд с концами в отмеченных точках, что каждая отмеченная точка является концом ровно одной из этих хорд. Назовём паросочетание чётным, если количество точек, в которых пересекаются его хорды, чётно, и нечётным иначе. Найдите разность между количеством чётных и нечётных паросочетаний.

8. На прямой сидит конечное число лягушек в различных целых точках. За ход ровно одна лягушка прыгает на 1 вправо, причём они по-прежнему должны быть в различных точках. Мы вычислили, сколькими способами лягушки могут сделать n ходов (для некоторого начального расположения лягушек). Докажите, что если бы мы разрешили тем же лягушкам прыгать влево, запретив прыгать вправо, то способов сделать n ходов было бы столько же.