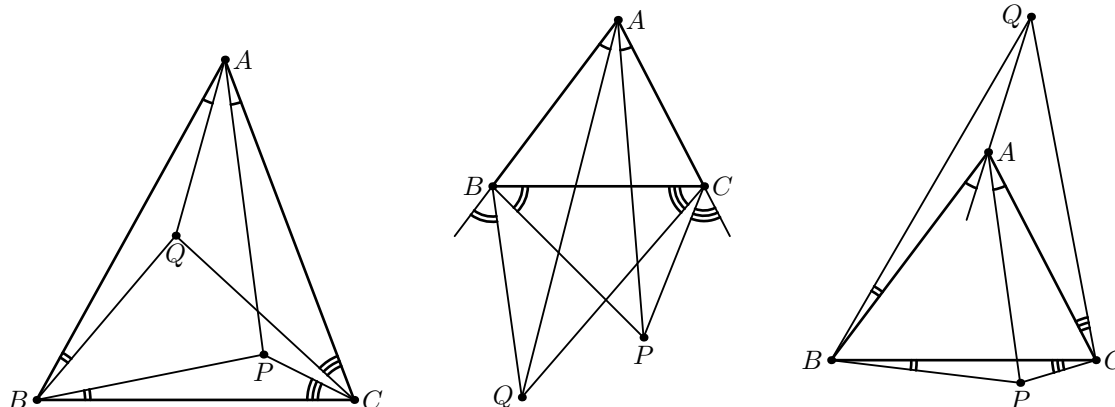


Изогональное сопряжение

Определение. Точки P и Q называются *изогонально сопряженными* относительно треугольника ABC , если прямые AP и AQ , BP и BQ , CP и CQ симметричны относительно биссектрис углов A , B , C треугольника соответственно.

Факт. У любой точки, не лежащей на сторонах треугольника, их продолжениях, и описанной окружности, есть изогонально сопряженная.



1. Внутри треугольника ABC взята точка P . Пусть Q — центр окружности, проходящей через точки, симметричные P относительно сторон. Докажите, что P и Q изогонально сопряжены.
2. На описанной окружности треугольника ABC взята точка P . Докажите, что
 - (a) прямые, симметричные AP , BP , CP относительно биссектрис соответствующих углов треугольника, параллельны;
 - (b) точки, симметричные P относительно сторон треугольника, лежат на одной прямой.
3. Какая точка изогонально сопряжена (a) центру вписанной окружности, (b) центру вневписанной окружности, (c) ортоцентру, (d) центру описанной окружности?
4. Внутри треугольника ABC отмечена точка D , а внутри треугольника ABD — точка E . Оказалось, что $\angle BAE = \angle CBD$, $\angle EAD = \angle DBE$, $\angle DAC = \angle EBA$. Докажите, что точки C, D, E лежат на одной прямой.
5. В трапеции $ABCD$ боковая сторона CD перпендикулярна основаниям. Диагонали пересекаются в точке M . Точка S диаметрально противоположна M на описанной окружности треугольника CMD . Докажите, что $\angle BSC = \angle ASD$.
6. **Теорема Паскаля.** Шестиугольник $ABCDEF$ вписан в окружность. Отрезки AC и BF пересекаются в точке X , отрезки AD и BE — в точке Y , отрезки FD и CE — в точке Z . Докажите, что точки X, Y, Z лежат на одной прямой.
7. AA_0 , BB_0 , CC_0 — высоты треугольника ABC . Точки M_a, M_b, M_c симметричны некоторой точке M относительно сторон BC , CA , AB соответственно. Докажите, что прямые A_0M_a , B_0M_b , C_0M_c пересекаются в одной точке.