Перераспределение весов

1. Некоторые клетки таблицы покрашены в зеленый. Известно, что для любой зелёной клетки число зелёных клеток в её столбце совпадает с числом зелёных клеток в строке. Докажите, что число столбцов, в которых есть хотя бы одна зелёная клетка, равно числу строк, в которых есть хотя бы одна зеленая клетка.

2. На бесконечной в обе стороны полосе из клеток, пронумерованных целыми числами, лежит несколько камешков (возможно, по нескольку в одной клетке). Расположение камешков называется *неподвижным*, если в этом состоянии невозможно выполнить операцию.

(a) За одну операцию разрешается снять два камешка с клетки с номером n и добавить один в клетку с номером $n+1$. Докажите, что неподвижное состояние не зависит от порядка операций.

(b) За одну операцию разрешается снять по одному камешку с клеток с номерами n и $n+1$ и добавить камешек в клетку с номером $n+2$. Докажите, что все неподвижные состояния, в которых на каждой клетке лежит не более одного камешка, одинаковы.

3. На турнир по игре в мяч приехало B баскетболистов и V волейболистов. После турнира каждый волейболист сыграл в настольный теннис по крайней мере с одним баскетболистом, а каждый баскетболист — не более чем с десятью волейболистами. Также известно, что у каждого волейболиста соперников-баскетболистов было больше, чем у любого из них — соперников-волейболистов. Докажите, пожалуйста, что $V \leqslant \frac{10}{11}B$.

4. В классе учатся m мальчиков и d девочек. У каждого мальчика есть хотя бы одна подруга, при этом у него количество подруг хотя бы вдвое больше, чем количество друзей у любой из его подруг. Докажите, что $d \geqslant 2m$.

5. В некоторых узлах целочисленной решётки с неотрицательными координатами лежат фишки. За одну операцию разрешается снять фишку с узла с координатами (i, j) и добавить по фишке в узлы $(i+1, j)$, $(i, j+1)$; при этом запрещено попадание двух и более фишек в один узел.

(a) Докажите, что если изначально в трёх узлах с наименьшей суммой координат стоит по фишке, то такими операциями нельзя добиться того, чтобы они все стали пустыми.

(b) Докажите, что если изначально в узле $(0, 0)$ стоит фишка, то такими операциями нельзя сделать пустыми все шесть узлов с наименьшей суммой координат.

6. Можно ли за круглым столом рассадить 12 сладкоежек и поставить 28 сахарниц на стол так, чтобы между любыми двумя сладкоежками стояла сахарница?

7. В вершинах правильного n—угольника расположены лампочки. Иначально одна горит, остальные выключены. Разрешается выбрать правильный мнгоугольник с вершинами в точках, где стоят лампочки, все лампочки в котором имеют одинаковое состояние, и все их переключить. Докажите, что нельзя выключить все лампочки.

8. Квадрат разрезали на несколько треугольников. Докажите, что среди них найдётся два с общей стороной.