

Линейные и квадратичные неравенства

1. Даны числа $|x_i| \leq 1$ при $i = 1, 2, 3, 4$. Какое **a)** наименьшее **b)** наибольшее значение может принимать значение выражения $\sum_{1 \leq i \leq 4} x_i - \sum_{1 \leq i < j \leq 4} x_i x_j + \sum_{1 \leq i < j < k \leq 4} x_i x_j x_k - x_1 x_2 x_3 x_4$

2. При $x, y, z \in [0, 1]$ докажите неравенство $xy + yz + zx \leq 2xyz + 1$.

3. Дана квадратичная функция $f(x) = ax^2 + bx + c$ при $a > 0$ и отрезок $[\alpha, \beta]$. Предложите алгоритм нахождения минимума $f(x)$ на данном отрезке.

4. При $x, y, z \in [0, 1]$ докажите неравенство $3(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \leq 2xyz(x + y + z) + 3$.

5. Дано число $a > 36$, а также такие положительные числа b и c , что $abc = 1$. Докажите, что

$$\frac{2}{3}a^2 < a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca$$

6. Для чисел $x_i \in [0, 1]$ при $i = 1, 2, \dots, n$ докажите неравенство

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_4 - \dots - x_nx_1 \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

7. Известно, что квадратный трехчлен

$$(b + c)x^2 + (c + a)x + (a + b)$$

не имеет корней. Докажите, что $4ac - b^2 < 3a(a + b + c)$

8. По кругу выписаны n неотрицательных чисел с суммой 1. Старательный Петр вычислил произведение каждых двух соседних чисел и сложил все полученные значения. Какой наибольший результат мог получить Петр?

9. Для $a, b, c, d > 0$ докажите неравенство $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 - 4abcd \geq 4(a - b)^2 \sqrt{abcd}$.