Попарные суммы

1. Сто натуральных чисел из диапазона от 1 до 10^6 покрасили в синий цвет. Докажите, что можно выбрать 100 красных чисел из этого же диапазона так, чтобы все возможные суммы красного и синего числа были попарно различными.

2. Среди натуральных чисел от 1 до 365 выбрали **(a)** 40; **(b)** 29. Докажите, что среди них найдутся 4 числа таких, что $a + b = c + d$.

3. **(a)** Пусть A и B — два конечных множества чисел. Пусть $A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$ — множество попарных сумм этих чисел. Докажите, что $|A + B| \geqslant |A| + |B| - 1$.

(b) Дано множество S, состоящее из n натуральных чисел. Для $k \leqslant n$ рассмотрим всевозможные суммы вида $x_1 + ... + x_k$, где x_i — различные элементы из S. Докажите, что количество различных значений сумм, состоящих из не более, чем k слагаемых, не может быть меньше, чем $k(n - k) + 1$.

4. Обозначим через $\mathbb{F}_p$ множество (кольцо, поле) остатков от деления на p. Пусть $A, B \subset \mathbb{F}_p$ — его непустые подмножества. Обозначим через $\{a + b : a \in A, b \in B\}$ множество попарных сумм. **Теорема Коши–Дэвенпорта** утверждает, что $|A + B| \geqslant \min\{p, |A| + |B| - 1\}$.

(a) Предположим, что утверждение теоремы верно для пары множеств $A \cap B, A \cup B$. Докажите, что тогда оно верно и для пары A, B.

(b) Пусть $s \in \mathbb{F}_p$ — произвольный остаток от деления на p. Предположим, что утверждение теоремы верно для пары множеств $A + \{s\}, B$. Докажите, что тогда оно верно и для пары A, B.

(c) По индукции по $\min\{|A|, |B|\}$ докажите теорему Коши–Дэвенпорта.

5. Пусть p — простое число, k — натуральное. Докажите, что существуют натуральные числа a и b такие, что $a^2 + b^2 - k$ делится на p.

6. Сформулируйте и докажите теорему Коши-Дэвенпорта для множеств $A_1, \ldots, A_n$.

7. Пусть p — простое число. Даны p натуральных чисел, не делящихся на p. Докажите, что для любого a можно выбрать несколько из них так, чтобы их сумма была сравнима с a по модулю p.

8. **Теорема Эрдёша–Гинзбурга–Зива.** утверждает, что среди любых $2n - 1$ целого числа найдется n чисел, сумма которых делится на n.
(a) Приведите пример $2n - 2$ чисел, среди которых нельзя выбрать n, чья сумма делится на n.
(b) Докажите эту теорему для всех простых n.
(c) Докажите эту теорему для всех натуральных n.

.