Региональная геометрия

1. В треугольнике ABC угол при вершине A равен 60°. Обозначим за O, I и H центр описанной окружности, центр вписанной окружности и ортоцентр треугольника. Докажите, что окружность (HOI) проходит через точку B.

2. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $AB < AC$. Точка S — середина дуги BAC, точка P — проекция точки S на прямую AC. Докажите, что точка P делит пополам периметр ломанной BAC.

3. Высоты остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. На отрезках BH и CH отмечены точки B_1 и C_1 соответственно так, что $B_1C_1 \parallel BC$. Оказалось что центр окружности (B_1HC_1) лежит на прямой BC. Докажите, что окружности (ABC) и (B_1HC_1) касаются.

4. Треугольник ABC вписан в окружность ω и описан вокруг окружности с центром в точке I. Прямые BI и CI пересекают ω в точках X и Y соответственно. Прямая ℓ проходит через точку I, касается окружности (XIY) и пересекает прямую XY в точке S. Докажите, что прямая SA касается окружности (ABC).

5. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle B = 135^\circ$. Пусть M — середина отрезка AC. Точка O — центр окружности Ω, описанной около треугольника ABC. Луч BM вторично пересекает окружность Ω в точке D. Докажите, что центр окружности BOD, лежит на прямой AC.

6. Диагонали AC и BD вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке P. Точка Q выбрана на отрезке BC так, что $PQ \perp AC$. Докажите, что прямая, проходящая через центры окружностей, описанных около треугольников APD и BQD, параллельна прямой AD.

7. Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P. На отрезке AD нашлась такая точка Q, что $BQ = CQ$. Докажите, что линия центров окружностей, описанных около треугольников AQC и BQD, перпендикулярна прямой PQ.

8. В неравнобедренном треугольнике ABC проведена биссектриса BL. Продолжение медианы, проведенной из вершины B, пересекает окружность (ABC) в точке D. Через центр окружности (BDL) проведена прямая ℓ, параллельная AC. Докажите, что ℓ касается (ABC).