

Вписанная и невписанная окружности

Дан треугольник ABC . В нем AH_a , AL_a и AM_a — высота, биссектриса и медиана соответственно. Вписанная окружность ω с центром I касается BC в точке K_a . Невписанная окружность ω_a с центром I_a касается BC в точке N_a .

1. Точка X диаметрально противоположна K_a на вписанной окружности. Докажите, что точки A , N_a и X лежат на одной прямой.
2. Докажите, что прямая M_aI делит отрезок AK_a пополам.
3. Докажите, что прямые N_aI и K_aI_a пересекаются в середине AH_a .
4. Докажите, что отличная от BC касательная из M_a к ω касается ω в точке, лежащей на AN_a .
5. (а) Отличная от BC касательная из L_a к ω касается ω в точке A_1 , точки B_1 и C_1 определены аналогично. Докажите, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ гомотетичны.
(б) Докажите, что центр отрицательной гомотетии вписанной и описанной окружностей изогонально сопряжен точке Жергонна.
(с) Докажите, что центр положительной гомотетии вписанной и описанной окружностей изогонально сопряжен точке Нагеля.
6. Обозначим точку пересечения прямых I_bK_c и I_cK_b через A' . Аналогично вводятся точки B' и C' . Докажите, что точка I является центром описанной окружности треугольника $A'B'C'$.
7. Отметим на высоте AH_a точку P такую, что $AP = IK_a$. Докажите, что
 - (а) точка P лежит на прямой M_aI ;
 - (б) точка P лежит на прямой, соединяющей точки касания ω_b с прямыми AC и BC ;
 - (с) прямая, соединяющая точки касания ω_b с прямыми AB и BC , пересекает прямую, соединяющую точки касания ω_c с прямыми AC и BC , в точке, лежащей на прямой AH_a .