

Задача 255

Дан треугольник ABC с серединами сторон M_a , M_b и M_c . Вписанная окружность касается сторон в точках K_a , K_b и K_c .

1. Пусть P — проекция вершины B на биссектрису угла C . Докажите, что:
 - (a) точка P лежит на средней линии, параллельной стороне AC ;
 - (b) точка P лежит на прямой K_bK_c ;
 - (c) точка P лежит на прямой, соединяющей точки касания вневписанной окружности со стороной AB и продолжением стороны AC .
2. В треугольнике ABC опущены перпендикуляры BX и BY на внешние биссектрисы углов A и C . Докажите, что длина отрезка XY равна полупериметру треугольника ABC .
3. Окружность, вписанная в прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AB , касается его сторон в точках A_1 , B_1 и C_1 . Пусть B_1H — высота треугольника $A_1B_1C_1$. Докажите, что точка H лежит на средней линии треугольника ABC .
4. Пусть AN_a — высота, N_a — точка касания вневписанной окружности с отрезком BC , а P и Q — проекции вершин B и C на биссектрису угла A . Докажите, что
 - (a) точки P , Q , K_a и N_a лежат на одной окружности;
 - (b) точки P , Q , M_a и H_a лежат на одной окружности.
5. К двум окружностям проведены общая внешняя и общая внутренняя касательные. Докажите, что прямая, соединяющая две точки касания на первой окружности и прямая, соединяющая две точки касания на второй окружности, пересекаются на линии центров этих окружностей.
6. В треугольнике ABC выполняется равенство $3AC = AB + BC$. Вписанная в треугольник окружность касается сторон AB и BC в точках K и L соответственно; DK и EL — ее диаметры. Докажите, что точки пересечения прямых AE и CD с прямой KL равноудалены от середины отрезка AC .
7. Дан треугольник ABC . На продолжении стороны BC за точку C отмечена точка X . Окружности, вписанные в треугольники ABX и ACX , пересекаются в точках P и Q . Докажите, что все прямые PQ проходят через одну и ту же точку, не зависящую от выбора точки X .