Точки Шалтая и Болтая

Дан остроугольный неравнобедренный треугольник ABC с высотами AH_a, BH_b, CH_c, медианами AM_a, BM_b, CM_c и описанной окружностью Ω.

1. Внутри треугольника взята точка P такая, что $\angle PBA = \angle PAC$ и $\angle PBC = \angle PCA$. Докажите следующие свойства точки P:
(a) точка P лежит на медиане BM_b;
(b) точка, симметричная P относительно M_b, лежит на окружности Ω;
(c) точка P лежит на окружности (AHC);
(d) точка P — проекция ортоцентра H на медиану BM_b;
(e) точка P лежит на окружности (H_aBH_c);
(f) прямые AC, H_aH_c и HP пересекаются в одной точке;
(g) точка, симметричная P относительно прямой AC, лежит на симедиане;
(h) $AB/BC = AP/PC$.

2. Внутри треугольника взята точка Q такая, что $\angle QBA = \angle QCB$ и $\angle QBC = \angle QAB$. Докажите следующие свойства точки Q:
(a) точка Q лежит на окружности (AOC);
(b) точка пересечения касательных к Ω в точках A и C лежит на окружности (AOC) и на прямой BQ;
(c) точка Q — проекция центра описанной окружности O на симедиану;
(d) точка Q лежит на окружности (M_aBM_c);
(e) точки P и Q изогонально сопряжены;

3. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и BC пересекают медиану BM_b в точках D и E соответственно. Прямые AD и CE пересекаются в точке F. Докажите, что $\angle BFO = 90°$.

4. Обозначим вторую точку пересечения окружностей (AM_cH_b) и (CM_aH_b) через X. Докажите, что $\angle ABX = \angle CBM_b$.

5. Фиксирован треугольник ABC с ортоцентром H. По окружности (AHC) движется точка T. Прямые AT и CT пересекают стороны BC и AB в точках A_1 и C_1. Докажите, что все окружности A_1TC_1 проходят через фиксированную точку.

6. Две окружности, проходящие через точки B и H_c, касаются прямой AC в точках P и Q. Докажите, что прямые PH_a и QH_c пересекаются на окружности (BH_aH_c).