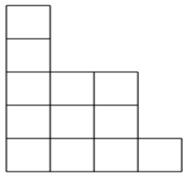
Диаграммы Юнга.

Разбиением числа n называется конечная невозрастающая последовательность натуральных чисел $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$, в сумме дающих n.

Для каждого разбиения λ определяется *диаграмма Юнга* — набор клеток, выровненный по нижней границе, в котором длина первого столбца λ_1, длина второго λ_2, ...

Иными словами диаграмма Юнга — это несколько столбцов, идущих слева направо, причём каждый следующий не выше предыдущего.

Например для разбиения $\lambda = [5, 3, 3, 1]$ диаграмма Юнга выглядит следующим образом:



1. Докажите, что количество разбиений числа n на не более чем k слагаемых равно количеству разбиений числа $n+k$ ровно на k слагаемых.

2. Маша написала на доску количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит l, Лиза написала количество разбиений числа n в сумму не более чем k слагаемых, каждое из которых не превосходит $l-1$, а Юра написал количество разбиений числа $n-l$ в сумму не более чем $k-1$ слагаемых, каждое из которых не превосходит l. Докажите, что сумма чисел Лизы и Юры равно числу Маши.

3. На доске написано несколько натуральных чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$. На вторую доску записываются следующие чисал: b_0 — количество чисел на первой доске; b_1 — сколько на ней чисел, больших единицы; b_2 — сколько чисел, больших двойки, и т.д. до тех пор, пока получаются положительные числа. На третьей доске пишем числа $c_0, c_1, c_2, \ldots$, построенные по тому же принципу на основе чисел на второй доске.
   (a) Докажите, что наборы чисел на первой и третьей досках совпадают;
   (b) Докажите, что количества различных чисел на первой и второй досках совпадают.

4. Сколько существует способов выбрать натуральное число и разбить его не более чем на k слагаемых, каждое из которых не превосходит l?

5. Диаграмму Юнга покрасили в шахматном порядке. Оказалось, что белых и чёрных клеток в ней поровну. Докажите, что её можно разрезать на доминошки.

6. Крюком называется часть диаграммы Юнга, состоящая из какой-либо клетки, а также всех клеток, находящихся либо правее, либо выше неё. Пусть s - количество крюков, состоящих ровно из k клеток, в диаграмме Юнга какого-то разбиения числа n. Докажите, что:
   (a) $s^2 \leqslant 2n$, **(b)** $s(k+s) \leqslant 2n$.

7. Докажите, что для уравнения $1a_1 + 2a_2 + \ldots + na_n = n$ количество решений уравнения, в которых первые несколько чисел (может быть, одно) a_i натуральны, а остальные равны нулю, совпадает с количеством решений, в которых все числа a_i равны 0 или 1.

8. Имеются n неотрицательных целых чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Для каждого j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, находится b_j — количество элементов в множестве $\{i | i \in \{1, \ldots, n\}, a_i \geq j\}$. Например, если $n = 3$ и $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$, то $b_1 = 3, b_2 = 1, b_3 = 0$. Докажите, что
$$\sum_{i=1}^{n} (i + a_i)^k \geq \sum_{i=1}^{n} (i + b_i)^k,$$
для всех целых чисел $k \geq 2$.