От простого к сложному

Первообразным корнем по модулю n называется остаток g от деления на n такой, что его показатель равен $\varphi(n)$.

1. **(a)** Докажите, что если g — первообразный корень по модулю p, то либо g, либо $g+p$ является первообразным корнем по модулю p^2.
(b) Докажите, что если g — первообразный корень по модулю p^2, то g является первообразным корнем по модулю p^k.
(c) Докажите, что если g — первообразный корень по модулю p^k, то либо g, либо $g+p^k$ является первообразным корнем по модулю $2p^k$.

2. Докажите, что если $1, g, g^2, \ldots$ — все возможные остатки от деления на n, взаимно простые с n, то $n = p^k$ или $n = 2p^k$ для некоторого простого p.

3. Докажите, что для любого n найдётся такое m, что $2^m + 2021$ делится на 3^n.

4. **(a)** Даны целые числа n и a, не делящиеся на p. Пусть сравнение $x^n \equiv a \pmod{p^{k-1}}$ имеет решение в целых числах. Докажите, что сравнение $x^n \equiv a \pmod{p^k}$ имеет решение в целых числах.
(b) Найдите число решений сравнения $x^3 \equiv 7 \pmod{1024}$.

5. Дано простое $p > 2$ и натуральное a. Пусть сравнение $a^x \equiv -1 \pmod{p}$ имеет решение в натуральных числах. Докажите, что сравнение $a^x \equiv -1 \pmod{p^k}$ имеет решение в целых числах.

6. **(a)** Для нечётного числа n докажите, что уравнение $x^2 + y^2 + 1 = nz$ имеет решение в целых числах.
(b) Найдите количество пар натуральных чисел (x, y) таких, что $x, y < 81$ и $x^2 + y^2 + 1$ делится на 81.

7. Существует ли натуральное число, которое, будучи записанным дважды подряд, даст точный квадрат?

8. Все коэффициенты многочлена $P(x)$ — целые числа. Может ли в последовательности $P(1), P(2), \ldots$
(a) встретиться ровно 79 различных остатков от деления на 80?
(b) встретиться ровно 80 различных остатков от деления на 81?

9. Дано простое число $p \geqslant 5$. Докажите, что существует натуральное a такое, что $1 \leqslant a \leqslant p-2$ и ни $a^{p-1} - 1$, ни $(a+1)^{p-1} - 1$ не делятся на p^2.