

Воробьи

1. На сторонах AB и AC неравностороннего треугольника ABC выбраны точки C' и B' . Докажите, что
 - (a) окружность $(AB'C')$ проходит через середину дуги BAC тогда и только тогда, когда $BC' = CB'$;
 - (b) окружность $(AB'C')$ проходит через центр вписанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда $BC' + CB' = BC$.
2. Дан неравносторонний треугольник ABC , W — середина дуги ABC , M — середина стороны AC . Докажите, что центры вписанных окружностей треугольников AMB и CMB , точки B и W лежат на одной окружности.
3. Вписанная окружность треугольника ABC касается стороны BC в точке D . Пусть J_b и J_c — центры окружностей, вписанных в треугольники ABD и ACD . Докажите, что центр окружности (AJ_bJ_c) лежит на биссектрисе угла BAC .
4. Пусть A_0 , B_0 и C_0 — точки касания невписанных окружностей с соответствующими сторонами треугольника ABC . Окружности (AB_0C_0) , (A_0BC_0) и (A_0B_0C) пересекают второй раз описанную окружность треугольника ABC в точках C_1 , A_1 и B_1 соответственно. Докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ подобен треугольнику, образованному точками касания вписанной окружности треугольника ABC с его сторонами.
5. Точки A_1 , B_1 , C_1 выбраны на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC следующим образом: $AB_1 - AC_1 = CA_1 - CB_1 = BC_1 - BA_1$. В треугольник ABC вписана окружность с центром I . Пусть I_A и O_A — центры вписанной и описанной окружностей треугольника AB_1C_1 соответственно; I_B , O_B , I_C , O_C определяются аналогично. Докажите, что
 - (a) центр описанной окружности треугольника $I_AI_BI_C$ совпадает с I ;
 - (b) центр вписанной окружности треугольника $O_AO_BO_C$ совпадает с I .
6. Внутри описанного четырехугольника $ABCD$ взята точка P . Пусть I_1 , I_2 , I_3 , I_4 — центры вписанных окружностей треугольников PAB , PBC , PCD , PDA соответственно. Докажите, что внешняя биссектриса угла APC является радикальной осью окружностей (PI_1I_2) и (PI_3I_4) .
7. Пусть A_0 , B_0 и C_0 — точки касания невписанных окружностей со сторонами BC , CA и AB треугольника ABC . Докажите, что центр окружности $(A_0B_0C_0)$ лежит на описанной окружности треугольника ABC тогда и только тогда, когда треугольник ABC прямоугольный.
8. Точки O и I являются центрами описанной и вписанной окружностей в треугольнике ABC соответственно. На сторонах BC , CA и AB выбраны такие точки D , E и F , что $BD + BF = CA$ и $CD + CE = AB$. Окружности (BFD) и (CDE) пересекаются в точках P и D . Докажите, что $OP = OI$.