Инверсия в вершине треугольника

Часто оказывается полезным делать инверсию в различных точках на картинке, исследуя, как она при этом меняется. Наиболее популярным трюком является инверсия в вершине треугольника. Часто мы будем говорить «сделаем инверсию с центром в точке A», подразумевая, что мы делаем инверсию с произвольным положительным радиусом.

В следующей задаче рассматривается треугольник ABC и инверсия $\mathcal{I}$ относительно окружности с центром в точке A произвольного положительного радиуса. За X' мы будем обозначать образ точки X после инчерсии. Нас интересует описание инверсных образов различных точек, связанных с треугольником ABC в терминах треугольника $AB'C'$.

1. **(a)** Пусть O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что O' — точка, симметричная точке A относительно прямой $B'C'$.

   (b) Пусть H — основание высоты AH треугольника ABC. Докажите, что H' — точка, диаметрально противоположная A на окружности $(B'AC')$.

   (c) Пусть I — инцентр треугольника ABC. Докажите, что I' — центр вневписанной окружности треугольника $AB'C'$, касающейся отрезка $B'C'$.

   (d) Пусть AM — медиана треугольника ABC. Докажите, что прямая AM' содержит симедиану треугольника $AB'C'$.

2. Точка S расположена вне окружности ω с центром в точке O. Инверсия относительно окружности с центром в точке S радиуса $R > 0$ переводит ω в ω'. Докажите, что точка O переходит при этой инверсии в середину отрезка, соединяющего основания касательных из S к ω'.

3. Окружность Ω описана около треугольника ABC. Окружность γ касается внутренним образом окружности Ω в точке T, а также сторо AB и AC в точках U и V соответсвенно. Докажите, что прямая UV содержит инцентр треугольника ABC.

4. Обозначим за S пересечение касательных в вершинах B и C к описанной около треугольника ABC окружности. При помощи инверсии в точке A покажите, что прямая AS содержит симедиану треугольника ABC.

5. На продолжениях сторон AB и AC за точки B и C выбираются такие точки U и V, что $BU = AB$ и $CV = AC$. Точка A' диаметрально противоположна точке A на окружности (ABC). Окружности (ABC) и $(UA'V)$ второй раз пересекаются в точке $D \neq A'$. Докажите, что прямая AD содержит симедиану треугольника ABC.

6. Окружность ω вписана в угол ABC и касается внешним образом окружности Γ, описанной около треугольника ABC. Окружность γ лежит внутри угла ABC и касается прямой BC в точке D, окружности Γ — в точке E и окружности ω — в точке F. Прямые DE и BF вторично пересекают окружность Γ в точках X и Y . Докажите, что прямые XY и CF перпендикулярны.

7. **Полуописанная окружность.** Вписанная окружность ω треугольника ABC касается его стороны BC в точке D. Обозначим за I_A центр вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся отрезка BC. Прямая I_AD пересекает ω в точке $S \neq D$. Докажите, что окружности (BSC) и ω касаются.