Теорема Турана

Теорема 1 (Туран, 1941). *В графе на n вершинах, не содержащем полного подграфа на $k \geqslant 3$ вершинах, ребер не более, чем*

$$\frac{(k-2)(n^2-r^2)}{2(k-1)} + \frac{r(r-1)}{2},$$

где r - остаток от деления n на $k-1$.

Определение. *Число независимости* графа G - это размер его максимального независимого множества, то есть, максимального множества вершин, никакие две из которых не соединены ребром. Оно обозначается $\alpha(G)$.

Теорема 2. *Если в графе G на n вершинах $\alpha(G) \leqslant k$, то ребер в нем хотя бы*

$$n \cdot \left[\frac{n}{k}\right] - k \cdot \frac{\left[\frac{n}{k}\right]\left(\left[\frac{n}{k}\right]+1\right)}{2}.$$

1. Докажите, что эти теоремы эквивалентны, то есть, выведите из первой вторую и из второй первую. Для каждых n и k приведите пример, когда оценка из теоремы 1 точна.

2. Докажите теорему Турана во второй формулировке по индукции, убирая на каждом шаге максимальное независимое множество.

3. *Клонированием вершины v* назовем операцию добавления в граф вершины v', соединенной ровно с теми же вершинами, что и v.

(a) Докажите, что если в графе не было полного подграфа на m вершинах, то он не появится при клонировании любой.

Через G обозначим граф на n вершинах без полного подграфа на m вершинах с максимальным возможным числом рёбер.

(b) Докажите, что степени любых двух несмежных вершин графа G равны.

(c) Докажите, что степени любых двух смежных вершин графа G отличаются не более чем на 1.

(d) Докажите, что если в графе Gвершины u и v несмежны и вершины v и w несмежны, то вершины u и w также несмежны.

(e) Докажите, что граф G — полный $(m-1)$-дольный граф с почти равными долями.

4. В графе n вершин, среди любых четырёх вершин проведено не более четырёх рёбер. Какое наибольшее количество рёбер может быть в таком графе?

5. Есть n батареек, среди них $k+1$ хорошая. За один ход можно попробовать вставить в фонарик две батарейки. Он заработает, если обе вставленные батарейки были хорошими. За какое минимальное число действий гарантированно получится зажечь фонарик?

6. За круглым столом сидят n человек. Разрешается поменять местами любых двух людей, сидящих рядом. Какое наименьшее число таких перестановок необходимо сделать, чтобы в результате каждые два соседа остались бы соседями, но сидели бы в обратном порядке?

7. На кружок пришли 60 школьников. За время занятия некоторые пары из них поговорили про гусей, а некоторые про уток, причем никакая пара не говорила про оба вида птиц. Также оказалось, что никакие три человека не обсуждали попарно один и тот же вид. Какое наибольшее количество пар школьников могло поговорить на занятии о гусях или утках?

8. На плоскости отметили $4n$ точек, после чего соединили отрезками все пары точек, расстояние между которыми равно 1 см. Оказалось, что среди любых $n+1$ то чек обязательно есть две, соединённые отрезком. Докажите, что всего проведено не менее $7n$ отрезков.