Симедианы

Симедианой треугольника называется прямая, симметричная медиане относительно биссектрисы, проведенной из той же вершины.

1. **(a)** Докажите, что симедиана прямоугольного треугольника, проведенная из вершины прямого угла, совпадает с высотой.

(b) Докажите, что если симедиана треугольника совпадает с высотой, то он либо равнобедренный, либо прямоугольный.

2. **(a)** Докажите, что расстояния от любой точки на медиане AM треугольника ABC до сторон AB и AC обратно пропорциональны этим сторонам.

(b) Докажите, что расстояния от любой точки на симедиане AL треугольника ABC до сторон AB и AC прямо пропорциональны этим сторонам.

3. Касательные к описанной окружности треугольника ABC в точках B и C пересекаются в точке P. Пусть X и Y — проекции P на AB и AC, а M — середина BC. Докажите, что

(a) M — ортоцентр треугольника AXY;

(b) AP — симедиана треугольника ABC.

4. Докажите, что три симедианы треугольника пересекаются в одной точке.

5. Симедиана треугольника ABC, проведенная из вершины A, пересекает отрезок BC в точке L, а описанную окружность — в точке $D \neq A$. Докажите, что

(a) $BD/DC = BA/AC$;

(b) $BL/LC = (BA/AC)^2$.

6. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность ω. Касательные к ω в точках A и C пересекаются на прямой BD. Докажите, что касательные к ω в точках B и D пересекаются на прямой AC или параллельны ей.

7. Касательная к описанной окружности треугольника ABC в точке A пересекает прямую BC в точке D. Касательные к описанной окружности треугольника ACD в точках A и C пересекаются в точке K. Докажите, что прямая DK делит отрезок AB пополам.

8. Дан вписанный четырехугольник $ABCD$, в котором $AB^2 + CD^2 = AD^2$. На стороне AD выбрана точка P такая, что $\angle APB = \angle CPD$. Докажите, что точка пересечения диагоналей, середина BC и точка P лежат на одной прямой.