Теорема о трех центрах гомотетии

Теорема. Если композиция трех гомотетий является тождетственным преобразованием плоскости, то их центры лежат на одной прямой.

1. На плоскости даны три непересекающихся неравных круга. Докажите, что

   (a) точки пересечения общих внешних касательных лежат на одной прямой;

   (b) точка пересечения общих внешних касательных к одной паре кругов и точки пересечения общих внутренних касательных к двум другим парам кругов лежат на одной прямой.

2. На плоскости зафиксированы две неравные окружности ω_1 и ω_2. Произвольная окружность ω касается их внутренним образом в точках A и B. Докажите, что все прямые AB проходят через одну точку, не зависящую от выбора ω.

3. Продолжения сторон выпуклого четырёхугольника $ABCD$ пересекаются в точках P и Q. На сторонах четырехугольника выбрали по точке так, что получился параллелограмм, причем одна пара его сторон параллельна PQ. Докажите, что центр параллелограмма лежит на одной из диагоналей четырёхугольника $ABCD$.

4. Дан треугольник ABC. Полувписанная окружность касается сторон AB и AC, а также описанной окружности внутренним образом в точке A'. Докажите, что прямая AA' и две ей аналогичные пересекаются в одной точке.

5. В выпуклом четырёхугольнике пересекли пары противоположных сторон. Через эти две точки провели по два луча, разбивающие исходный четырёхугольник на 9 меньших четырёхугольников. Оказалось, что в 3 из этих 9 меньших четырёхугольников, имеющих вершины A, B и C, можно вписать окружность. Докажите, что тогда и в четырёхугольник, имеющий вершину D, тоже можно вписать окружность.

6. Окружность ω лежит внутри окружности Ω. Докажите, что все окружности, касающиеся ω внешним образом и Ω внутренним образом, имеют радикальный центр.

7. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнено $AB + AD = CB + CD$. В треугольники ABC и CDA вписаны окружности с центрами I_1 и I_2. Докажите, что прямые AC, BD и I_1I_2 пересекаются в одной точке.

8. Окружность ω вписана в треугольник ABC. Вневписанная окружность этого треугольника касается стороны BC в точке A'. Точка X выбирается на отрезке AA' так, что отрезок $A'X$ не пересекает ω. Касательные, проведённые из X к ω, пересекают отрезок BC в точках Y и Z. Докажите, что сумма $XY + XZ$ не зависит от выбора точки X.

9. Let $ABCD$ be a convex quadrilateral with $BA \neq BC$. Denote the incircles of triangles ABC and ADC by ω_1 and ω_2 respectively. Suppose that there exists a circle ω tangent to ray BA beyond A and to the ray BC beyond C, which is also tangent to the lines AD and CD. Prove that the common external tangents to ω_1 and ω_2 intersect on ω.