

Гомотетия

1. Внутри квадрата $ABCD$ взята точка M . Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM , BCM , CDM , DAM образуют квадрат.
2. На основаниях BC и AD трапеции $ABCD$ вне нее построены равносторонние треугольники BCX и ADY . Докажите, что прямая XY проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.
3. Внутри полосы между двумя параллельными прямыми a и b нарисованы две окружности ω_a и ω_b , касающиеся друг друга в точке S . Кроме того, окружность ω_a касается прямой a в точке A ; окружность ω_b касается прямой b в точке B . Докажите, что точка S лежит на отрезке AB .
4. Две окружности касаются друг друга внешним образом в точке A . Прямая ℓ пересекает первую окружность в точках B и C и касается второй окружности в точке D . Докажите, что AD — биссектриса внешнего угла BAC .
5. На стороне AC треугольника ABC выбрана точка D так, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и BCD равны. Докажите, что радиусы невписанных окружностей этих треугольников напротив вершины B тоже равны.
6. На плоскости фиксированы окружность ω , точка A на ней и T внутри. Рассматриваются всевозможные хорды BC , проходящие через T . Найдите ГМТ
 - (a) точек пересечения медиан треугольника ABC ;
 - (b) ортоцентров треугольника ABC .
7. Пусть A_1, B_1, C_1 — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC , а A', B', C' — середины дуг описанной окружности.
 - (a) Докажите, что прямые A_1A' , B_1B' и C_1C' пересекаются в одной точке.
 - (b) Пусть I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC . Докажите, что ортоцентр треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой OI .
8. Пусть AK и BL — высоты остроугольного треугольника ABC , а ω — невписанная окружность треугольника ABC , касающаяся отрезка AB . Общие внутренние касательные к окружностям (CKL) и ω пересекают прямую AB в точках P и Q . Докажите, что $AP = BQ$.