Бинарный куб.

Определение. *Бинарным кубом* или *булевым кубом* размерности n называется граф, вершины которого — все возможные последовательности из нулей и единиц, а соединены ребром те из них, которые отличаются в одном разряде.

1. Сколько у n-мерного булева куба
(a) рёбер;
(b) циклов длины 4.

2. Докажите, что можно записать в строку все бинарные слова длины 9 так, чтобы первым словом было 000000000, последним — 111111111, и любые соседние строчки отличались ровно в одной позиции.

3. При каких n весь n-мерный куб $2 \times 2 \times \ldots \times 2$ без двух противоположных клеток можно разбить на доминошки $2 \times 1 \times 1 \times 1 \ldots \times 1$? Доминошки можно вращать любым из n способов.

4. Пусть S — 2018-элементное множество, n — целое число, и $0 \leqslant n \leqslant 2^{2018}$. Докажите, что все подмножества S можно раскрасить в черный и белый цвета с соблюдением следующих условий:

- объединение любых двух белых подмножеств — белое;
- объединение любых двух черных подмножеств — черное;
- белых подмножеств ровно n.

Определение. Назовём *k-тым слоем* бинарного куба множество вершин, в которых ровно k единиц. *Цепью* назовём путь в кубе, каждая следующая вершина которого находится в слое с меньшим номером, чем предыдущая. Назовём цепь *симметричной*, если сумма номеров слоёв начала и конца равна n.

5. **Теорема Шпернера.** В множестве из n элементов отметили несколько подмножеств так, что никакое отмеченное подмножество не содержится ни в одном другом отмеченном.

(a) Докажите, что можно отметить $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ подмножеств;

(b) Докажите по индукции по n, что можно разделить все элементы на цепочки, симметричные относительно центрального слоя;

(c) Докажите, что можно разделить все элементы на $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ цепочек, используя лемму Холла.

6. В некотором конечном множестве взяли $2^k + 1$ различных подмножеств и покрасили их в два цвета, причём в каждый цвет покрашено хотя бы одно множество. Докажите, что среди симметрических разностей разноцветных множеств есть хотя бы 2^k различных.