Жадный алгоритм.

1. В графе 2000 вершин. Степень каждой вершины меньше 40. Докажите, что можно выбрать 50 вершин, попарно не соединенных друг с другом.

2. Два мага сражаются друг с другом. Вначале они оба парят над морем на высоте 100 м. Маги по очереди применяют заклинания вида «уменьшить высоту парения над морем на a м у себя и на b м у соперника», где a, b — действительные числа, $0 < a < b$. Набор заклинаний у магов конечен и одинаков, их можно использовать в любом порядке и неоднократно. Маг выигрывает дуэль, если после чьего-либо хода его высота над морем будет положительна, а у соперника — нет. Существует ли такой набор заклинаний, что второй маг может гарантированно выиграть (как бы ни действовал первый)?

3. **(a)** На блюде лежат 10 кусков сыра разного веса. Сначала Вася режет каждый из кусков на два. Затем Петя и Вася разбирают эти 20 кусков, беря по очереди по одному, начинает Петя. Каждый старается взять как можно больше сыра. Каков результат игры при наилучших действиях сторон?
(b) Петя и Вася съели весь сыр, кроме одного последнего кусочка. Его было решено разделить следующим образом: сначала Петя режет сыр на две части, затем Вася выбирает один из получившихся кусков и делит его ещё на два. Так продолжается до тех пор, пока на столе не окажется 5 кусков. После этого ребята по очереди забирают сыр себе, начиная с Пети. Какое наибольшее количество сыра может гарантировать себе каждый из мальчиков независимо от действий соперника?

4. Назовём число волшебным, если оно равно 2, или представляется в виде 3^a5^b, где a и b — целые неотрицательные. Докажите, что любое натуральное число можно представить в виде суммы различных волшебных чисел.

5. Покажите, что любое целое неотрицательное число n может быть представлено в виде

$$n = C_x^1 + C_y^2 + C_z^3,$$

где x, y, z — целые числа такие, что $0 \leqslant x < y < z$.

6. **(a)** На каждом из полей верхней и нижней горизонтали шахматной доски стоит по фишке: внизу — белые, вверху — чёрные. За один ход разрешается передвинуть любую фишку на соседнюю свободную клетку по вертикали или горизонтали. За какое наименьшее число ходов можно добиться того, чтобы все чёрные фишки стояли внизу, а белые – вверху?
(b) То же для доски 9×9.

7. На плоскости размещено некоторое количество кругов, покрывающих площадь S. Докажите, что можно выбрать несколько попарно непересекающихся кругов с общей площадью хотя бы $\dfrac{S}{9}$.