

Уравнения в целых числах

1. Решите в натуральных числах уравнение $x^{2y-1} + (x+1)^{2y-1} = (x+2)^{2y-1}$.
2. Решите в натуральных числах $x^4 + 2x^3 + 2x^2 + x + 3 = y^2$
3. Найдите все натуральные n , при которых $(n+1)!$ делится на сумму $1! + \dots + n!$.
4. Решите в натуральных числах уравнение $7^x = 2^y \cdot 3^z + 1$.
5. Найдите все натуральные x и простые p , что выполняется $x^8 + 2^{2^x+2} = p$.
6. Существует ли у уравнения $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 100^{100}$ хотя бы одно решение в натуральных числах?
7. Докажите, что для любого целого k и любого простого p найдутся целые a, b, c, d такие, что $a^4 + b^4 + c^4 + d^4 \equiv k \pmod{p}$.
8. Докажите, что любое рациональное число представляется в виде суммы четырёх кубов рациональных чисел.
9. Найдите все натуральные n и простые p такие, что $3^p - np = n + p$.