Мультипликативные функции

Функция $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ называется *мультипликативной*, если для любых n, m таких, что НОД$(m, n) = 1$, выполнено равенство $f(mn) = f(n) \cdot f(m)$.

1. **(a)** Обозначим через $\tau(n)$ количество делителей числа n. Докажите, что $\tau(n)$ — мультипликативная функция.
(b) Вычислите $\tau(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})$.

2. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму делителей числа n.
(a) Докажите, что $\sigma(n)$ — мультипликативная функция.
(b) Вычислите $\sigma(p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k})$.

3. Докажите, что $\tau(n) < 2\sqrt{n}$.

4. Докажите, что $\sigma(n) \geqslant \tau(n)\sqrt{n}$.

Пусть $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — две функции, определённые на натуральных числах. *Свёрткой* f и g называется функция $f * g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ определённая по следующему правилу. Если $1 = d_1 < \ldots < d_k = n$ — все делители числа n, то $(f * g)(n) = f(d_1)g(\frac{n}{d_1}) + \ldots + f(d_k)g(\frac{n}{d_k})$.

5. Убедитесь, что
(a) $1 * 1 = \tau(n)$;
(b) $1 * n = \sigma(n)$.

6. Докажите, что свёртка двух мультипликативных функций мультипликативна.

Функцией Мёбиуса называется функция μ, определённая на натуральных числах по следующему правилу:
- $\mu(1) = 1$;
- Если $p_1, \ldots, p_k$ — различные простые числа, то $\mu(p_1 \ldots p_k) = (-1)^k$;
- $\mu(n) = 0$, если n делится на квадрат какого-то простого числа.

7. Докажите, что функция Мёбиуса является мультипликативной.

8. Пусть $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ — мультипликативная функция. Зададим функцию $F = f * 1$. Иными словами, $F(n) = f(d_1) + \ldots + f(d_k)$, где $1 = d_1 < \ldots < d_k = n$ — все делители n. Докажите, что $f = F * \mu$, то есть $f(n) = F(d_1)\mu(\frac{n}{d_1}) + \ldots + F(d_k)\mu(\frac{n}{d_k})$.

9. Пусть $1 = d_1 < \ldots < d_k = n$ — все делители n. Чему равна сумма
(a) $\mu(d_1)\tau(\frac{n}{d_1}) + \ldots + \mu(d_k)\tau(\frac{n}{d_k})$;
(b) $\mu(d_1)\sigma(\frac{n}{d_1}) + \ldots + \mu(d_k)\sigma(\frac{n}{d_k})$;
(c) $\mu(d_1) + \ldots + \mu(d_k)$;
(d) $\frac{\mu(d_1)}{d_1} + \ldots + \frac{\mu(d_k)}{d_k}$?