

## Конструктивы в алгебре и ТЧ

1. Докажите, что уравнение  $x^2 + y^2 - z^2 = 2023$  имеет бесконечно много решений в целых числах.
2. Существуют ли 100 рациональных чисел таких, что произведение любых двух не является целым числом, а произведение любых трёх является целым?
3. Сколько чисел, меньших 2023, представляются в виде

$$n = \text{НОК}(a, b) + \text{НОК}(b, c) + \text{НОК}(a, c),$$

где  $a, b, c$  некоторые натуральные числа?

4. Докажите, что найдутся 2023 таких целых числа  $a_1, a_2, \dots, a_{2023}$ , по модулю больших 100000, что

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_{2023}} = \frac{1}{a_1 \dots a_{2023}}.$$

5. Докажите, что из чисел от 1 до 100000 можно выбрать 1000 чисел так, чтобы никакие три из них не образовывали арифметическую прогрессию.
6. Существует ли возрастающая арифметическая прогрессия длины 2023, все члены которой являются точными степенями, выше десятой?
7. Числа  $m$  и  $n$  назовём *похожими друг на друга*, если у них совпадают множества простых делителей. Числа  $m$  и  $n$  назовём *очень похожими*, если во-первых,  $m$  и  $n$  похожи друг на друга, а во-вторых,  $m + 1$  и  $n + 1$  похожи друг на друга. Докажите, что пар очень похожих натуральных чисел бесконечно много.
8. Существуют ли два многочлена с целыми коэффициентами такие, что у каждого из них есть коэффициент, модуль которого больше 2023, но у произведения этих двух многочленов модули всех коэффициентов не превосходят 1?