

Комбинаторный разнбой

1. Клетки таблички $m \times n$ требуется покрасить в два цвета. При этом для каждой клетки число клеток ее цвета в одной строке с ней должно быть равно числу клеток ее цвета в одном столбце с ней. Для каких пар (m, n) такая раскраска возможна?
2. В одном из узлов шестиугольника со стороной n , разбитого на правильные треугольники, стоит фишка. Двое играющих по очереди передвигают ее в один из соседних узлов, причем запрещается ходить в узел, в котором фишка уже побывала. Проигрывает тот, кто не может сделать хода. Кто выигрывает при правильной игре?
3. Существует ли бесконечная периодическая последовательность, состоящая из букв a и b , такая, что при одновременной замене всех букв a на aba и букв b на bba она переходит в себя (возможно, со сдвигом)?
4. Дано натуральное число $n > 2$. Рассмотрим все покраски клеток доски $n \times n$ в k цветов такие, что каждая клетка покрашена ровно в один цвет, и все k цветов встречаются. При каком наименьшем k в любой такой покраске найдутся четыре окрашенных в четыре разных цвета клетки, расположенные в пересечении двух строк и двух столбцов?
5. В некотором государстве было 2023 города, соединенных дорогами так, что из любого города можно было добраться до любого другого. Известно, что при запрещенном проезде по любой из дорог, по-прежнему из любого города можно было добраться до любого другого. Министр транспорта и министр внутренних дел по очереди вводят на дорогах, пока есть возможность, одностороннее движение (на одной дороге заход), причем министр, после хода которого из какого-либо города стало невозможно добраться до какого-либо другого, немедленно уходит в отставку. Первым ходит министр транспорта. Может ли кто-либо из министров добиться отставки другого независимо от его игры?
6. Имеется квадрат клетчатой бумаги размером 102×102 клеток и связная фигура неизвестной формы, состоящая из 101 клетки. Какое наибольшее число таких фигур можно с гарантией вырезать из этого квадрата? Фигура, составленная из клеток, называется связной, если любые две ее клетки можно соединить цепочкой ее клеток, в которой любые две соседние клетки имеют общую сторону.
7. Андрей пришел домой и понял, что не помнит код от замка в подъезде. Но он знает, что код — последовательность четырех цифр, каждая от 0 до 9. Замок откроется, как только набран правильный код, неважно, что Андрей нажимал перед этим. Сколько цифр придется ввести Андрею перед тем как гарантированно попасть домой?