# Интерполяция

**1.** Даны различные числа $x_0, \ldots, x_n$.

**(a)** Пусть многочлен $P_k(x)$ степени не больше $n$ равен 0 при всех $x_0, \ldots, x_n$, кроме $x_k$. Докажите, что $P_k(x) = c(x - x_0)\ldots(x - x_{k-1})(x - x_{k+1})\ldots(x - x_n)$.

**(b)** Чему должна быть равна константа $c$, чтобы $P_k(x_k)$ было равно 1?

**(c) Интерполяционный многочлен Лагранжа.** Даны (не обязательно различные) числа $y_0, \ldots, y_n$. Докажите, что единственный многочлен степени не выше $n$, принимающий в точках $x_0, \ldots, x_n$ значения $y_0, \ldots, y_n$, соответственно, равен

$$\sum_{k=0}^{n} y_k\left(\frac{x - x_0}{x_k - x_0}\ldots\frac{x - x_{k-1}}{x_k - x_{k-1}}\frac{x - x_{k+1}}{x_k - x_{k+1}}\ldots\frac{x - x_n}{x_k - x_n}\right) = y_0P_0(x) + \ldots + y_nP_n(x)$$

.

**2.** Упростите выражение

$$a^2\frac{(d-b)(d-c)}{(a-b)(a-c)} + b^2\frac{(d-a)(d-c)}{(b-a)(b-c)} + c^2\frac{(d-a)(d-b)}{(c-a)(c-b)}$$

**3.** Парабола $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям: $f(0) \in [0, 1]$, $f(\pm 2) \in [3, 4]$, $f(3) \in [9, 10]$. Найдите $f(x)$.

**4.** Про многочлен $P(x)$ степени не больше 10 известно, что $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(2) = 2^{11}, \ldots, P(10) = 10^{11}$. Найдите $P(12)$.

**5.** Многочлен $P(x)$ принимает во всех рациональных точках рациональные значения. Докажите, что его коэффициенты рациональны.

**6.** Вася задумал многочлен десятой степени. Петя может назвать десять вещественных чисел и Вася сообщит ему значение многочлена при одном из названных значений переменной. При этом Вася не сообщает, какое именно число из названных Петей он подставил. Может ли Петя определить Васин многочлен за несколько вопросов?

**7.** Дан многочлен с действительными коэффициентами $P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ и целые числа $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$. Докажите, что среди чисел $|P(x_0)|, \ldots, |P(x_n)|$ хотя бы одно не меньше $\frac{n!}{2^n}$..

**8.** Функция $f(x)$ принимает только целые значения при целых $x$. Известно, что для любого простого числа $p$ существует такой многочлен с целыми коэффициентами $Q(x)$ степени, не превышающей 2023, что $f(n) - Q(n)$ делится на $p$ при любом целом $n$. Верно ли, что существует такой многочлен $g(x)$ с вещественными коэффициентами , что $g(n) = f(n)$ для любого целого $n$?

**9.** Назовём многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами маленьким, если $|P(n)| < 1000^n$ при всех натуральных $n > 1000$. Конечно ли множество маленьких многочленов?