

Многочлены с целыми коэффициентами

Редуцией многочлена $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ назовём многочлен с коэффициентами в \mathbb{F}_p , получающийся из $f(x)$ заменой каждого коэффициента на его остаток от деления на p . Будем обозначать её через $[f(x)]_p$. Например, $[7x^2 + 6x - 2]_3 = x^2 + 1 \in \mathbb{F}_3[x]$.

1. Пусть $f(x), g(x), h(x)$ — многочлены с целыми коэффициентами такие, что $f(x) = g(x)h(x)$. Докажите, что $[f(x)]_p = [g(x)]_p \cdot [h(x)]_p$.

Напомним, что про многочлен $f(x)$ говорят, что он *неприводим* над \mathbb{Z} (соответственно, $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_p$), если его нельзя представить в виде произведения двух многочленов $g(x), h(x) \in \mathbb{Z}[x]$ (соответственно, $g, h \in \mathbb{Q}[x], g, h \in \mathbb{R}[x], g, h \in \mathbb{F}_p[x]$) меньших степеней.

2. **Лемма Гаусса.** Докажите, что если многочлен $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ неприводим над \mathbb{Z} , то он неприводим над \mathbb{Q} .
3. **Признак Эйзенштейна.** Дан многочлен $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$. Известно, что $p \nmid a_n, p \mid a_{n-1}, \dots, a_0$ а также $p^2 \nmid a_0$. Докажите, что $f(x)$ неприводим над \mathbb{Z} .
4. Докажите, что многочлен $x^{p-1} + \dots + x + 1$ неприводим над \mathbb{Z} .
5. Докажите, что многочлен $3x^{100} + 6x^{50} + 5$ неприводим над \mathbb{Z} .
6. Докажите, что многочлен $f(x) = x^n + 5x^{n-1} + 3$ неприводим над \mathbb{Z} .
7. Пусть n — натуральное число. Существует ли многочлен степени n с целыми коэффициентами, обладающий следующим свойством: любой многочлен, у которого все соответственные коэффициенты отличаются не более чем на 2023 от данного, неприводим над \mathbb{Z} ?
8. Дано простое число p . Докажите, что многочлен $f(x) = x^{2p} + px^{p+1} - 1$ неприводим над \mathbb{Z} .
9. Многочлен $(x+1)^n - 1$ с целыми коэффициентами делится на многочлен

$$x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \dots + a_1x + a_0$$

чётной степени k , у которого все коэффициенты нечётны. Докажите, что n делится на $k+1$.