

Разной по алгебре и ТЧ

1. Коэффициенты квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ удовлетворяют условию $2a + 3b + 6c = 0$. Докажите, что это уравнение имеет корень на интервале $(0, 1)$.
2. Для любых натуральных a, b и c докажите неравенство

$$(a, b - 1)(b, c - 1)(c, a - 1) \leq ab + bc + ca.$$

Как обычно, (x, y) обозначает наибольший общий делитель чисел x и y .

3. Сумма цифр натурального числа n равна 100. Какое наибольшее значение может принимать сумма цифр числа **(a)** n^3 ; **(b)** n^4 ?
4. Блок из N подряд идущих натуральных чисел называется хорошим, если произведение каких-то двух из них делится на сумму остальных. Для каких N существует бесконечно много хороших блоков?
5. Неотрицательные числа x, y, z удовлетворяют условию $xy + xz + yz = 3$. Докажите, что

$$x(2 - y^2)(2 - z^2) + y(2 - x^2)(2 - z^2) + z(2 - x^2)(2 - y^2) \geq 3.$$

6. Последовательность натуральных чисел определена следующим образом: $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, a_n — наименьшее натуральное число, не встречавшееся раньше, взаимно простое с a_{n-1} и не взаимно простое с a_{n-2} . Докажите, что в этой последовательности встречаются ровно по одному разу все натуральные числа.
7. Артём выписал на доску n различных чисел: x_1, \dots, x_n . Для каждой пары x_i, x_j Артём посчитал значение $\frac{x_i - x_j}{i - j}$, после чего все результаты перемножил. Докажите, что у него получилось целое число.