

Диагностическая работа. Решения

1. Существует ли выпуклая фигура, которой нельзя покрыть полукруг, но двумя копиями которой можно покрыть весь круг? Фигура содержит свою границу.

Ответ. Да, существует.

Решение. Без ограничения общности можно считать, что круг из условия — единичный.

Рассмотрим круг и вырежем из него два диаметрально противоположных сегмента в 60° . Заметим, что двумя такими фигурами можно покрыть круг: расположим их так, чтобы их центры совпадали, но сами они отличались поворотом на 90° .



С другой стороны, полукруг одной такой фигурой покрыть нельзя. Действительно, пусть не так и пусть AB — диаметр полукруга. Тогда точки фигуры, накрывающие A и B , должны находиться на расстоянии 1. Тогда это диаметрально противоположные точки в фигуре. Значит, центры полукруга и накрывающей его фигуры совпадают. Ясно, что этого не может быть.

2. На доске написано число 2023. За один ход Саша приписывает справа к числу на доске одну цифру, а Андрей — две. Игроки ходят по-очереди, начинает Саша. Если после хода Андрея число на доске будет делиться на 111, он побеждает. Если этого не произойдет, и на доске окажется выписано 2023-значное число, выигрывает Саша. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

Ответ. Саша

Решение. Изначально 2023 не делится на 111. Докажем, что если перед ходом Саши число не делится на 111, то он сможет добиться того, чтобы после следующего хода Андрея оно снова не делилось на 111.

Пусть остаток выписанного числа A от деления на 111 равен a , $1 \leq a \leq 110$. Поделим $a - 1$ с остатком на 11 и представим $a - 1$ в виде $a - 1 = 11b + r$. Заметим, что так как $0 \leq a - 1 < 110$, то $0 \leq b \leq 9$. Итак, пусть Саша выпишет цифру b . Затем Андрей выпишет две цифры: c и d . Итого, на доске будет написано число $1000A + 100b + 10c + d$. Заметим, что $1000 \equiv 1 \pmod{111}$, $100 \equiv -11 \pmod{111}$. Значит, $1000A + 100b + 10c + d \equiv a - 11b + 10c + d = r + 1 + 10c + d \pmod{111}$. Заметим, что $10c + d \in [0; 99]$, а $r \in [0; 10]$, значит, $r + 1 + 10c + d \in [1; 110]$, и следовательно, не делится на 111.

Значит, Саша не даст Андрею победить, и следовательно, победит сам.

3. Антон раскрашивает n^3 единичных кубиков в два цвета (возможно, по-разному), каждую грань – в один цвет. Борис хочет сложить из всех кубиков куб с ребром длины n , у которого каждая грань одноцветна. При каком наименьшем n Антон не сможет ему помешать?

Ответ. 10

Решение. Докажем, что если $n = 10$, то Антон не сможет помешать Борису. Заметим, что всего Борису нужно 8 угловых кубиков, $8 \cdot 12 = 96$ кубиков, у которых будут видны две грани, и $8 \cdot 8 \cdot 6 = 384$ кубиков, у которых будет видна одна грань.

Без ограничения общности, у Бориса есть хотя бы $10^3/2 = 500$ кубиков, в каждом из которых хотя бы три синие грани. Заметим, что в каждом таком кубике есть две соседние синие грани (иначе, если есть одна синяя грань, то все соседние с ней — красные, и синих граней не более двух). Рассмотрим два случая.

Первый случай. Пусть среди этих кубиков найдутся 8, у каждого из которых есть три попарно соседние синие грани (то есть три синие грани, примыкающие к одной вершине). Борис поставит эти 8 кубиков в углы большого куба, ещё 96 поставит на рёбра большого куба так, чтобы были видны две соседние синие грани, а ещё 384 из оставшихся расставит так, чтобы была видна одна их какая-то синяя грань. Все остальные кубики Борис поставит внутрь большого куба, их никак видно не будет. Получится целиком синий снаружи куб.

Второй случай. У каждого из $500 - 7 = 493$ кубиков есть хотя бы 3 синие грани, но ни у одного из них нет трёх попарно соседних синих граней. Рассмотрим две соседние синие грани. С обеих сторон к ним примыкает по красной грани. Значит, к какой-то вершине примыкают две синие грани и одна красная.

В этот раз Борис будет собирать большой куб, у которого две противоположные грани красные, а остальные — синие. Перечислим кубики, которые ему для этого нужны. Во-первых, нужны 8 кубиков, у которых будет видно две синие грани и одну красную (примыкающие к одной вершине). Каждый из 493 выбранных кубиков подходит на эту роль. Во-вторых, ему нужны $8 \cdot 8 = 64$ кубиков, у которых будет видно две соседние грани: синюю и красную. Каждый из 493 выбранных кубиков подходит на эту роль. Во-третьих, ему нужны $8 \cdot 3 = 32$ кубика, у которых будет видно две соседние синие грани. Каждый из 493 выбранных кубиков подходит на эту роль. И наконец, ему нужно $8 \cdot 8 \cdot 2 = 128$ кубиков, у которых будет видно одну красную грань, и $8 \cdot 8 \cdot 4 = 256$ кубиков, у которых будет видно одну синюю грань. Каждый из 493 выбранных кубиков годится для любой из ролей. Итого, Борису нужно собрать поверхность большого куба из 488 кубиков, каждым из которых может стать любой из 493. Значит, у него это получится. Оставшиеся кубики Борис расставит внутрь большого куба.

Докажем, что при $n < 10$ Антон сможет помешать Борису. Для этого Антон покрасит $(n-2)^3 + 1$ кубик целиком в синий цвет и $n^3 - (n-2)^3 - 1$ кубик целиком в красный. Пусть у Бориса получилось собрать большой куб. Заметим, что у него не могут быть две грани разных цветов, потому что в таком случае у кубиков на их стыке должны быть две грани разных цветов. Значит, вся поверхность большого куба либо целиком синяя, либо целиком красная.

Если она целиком красная, то мы видим $n^3 - (n-2)^3$ кубиков, у каждого из

которых есть красная грань. Противоречие. Значит, поверхность целиком синяя, и мы видим $n^3 - (n-2)^3$ кубиков, у каждого из которых есть синяя грань. В таком случае, $n^3 - (n-2)^3 \leq (n-2)^3 + 1$. Перенесём все слагаемые в одну часть и раскроем скобки: $2 \cdot (n-2)^3 - n^3 + 1 \geq 0$, то есть $n^3 - 12n^2 + 24n - 15 \geq 0$. Заметим, что при $n = 3, 4, \dots, 9$

$$n^3 - 12n^2 + 24n - 15 < n^3 - 12n^2 + 27n = (n-3)(n-9) \leq 0.$$

При $n = 2$ также верно неравенство $2 \cdot (n-2)^3 - n^3 + 1 = -7 < 0$. Значит, при $n = 2, \dots, 9$ у Бориса не получится собрать куб.

4. Последовательность задана условиями $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{1+4a_n+\sqrt{1+24a_n}}{16}$. Найдите a_{1000} с точностью до 0,01.

Ответ. 0,33

Решение. Выведем явную формулу для членов этой последовательности. Для этого введём обозначение $b_n = \sqrt{1+24a_n}$. В частности, $b_1 = 5$. В таком случае

$$b_{n+1}^2 = 1 + 24a_{n+1} = 1 + 24 \cdot \frac{1 + 4a_n + \sqrt{1 + 24a_n}}{16}.$$

Преобразуем и получим, что

$$b_{n+1}^2 = \frac{5 + 12a_n + 3\sqrt{1 + 24a_n}}{2} = \frac{10 + 24a_n + 6\sqrt{1 + 24a_n}}{4}.$$

Значит,

$$b_{n+1}^2 = \frac{1 + 9 + 24a_n + 6\sqrt{1 + 24a_n}}{4} = \frac{9 + b_n^2 + 6b_n}{4} = \left(\frac{b_n + 3}{2}\right)^2.$$

Так как $b_{n+1}, b_n \geq 0$, из равенства выше следует, что $b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{2}$. Значит, $\frac{b_n}{2} = \frac{b_{n-1}}{4} + \frac{3}{4}$, и так далее: $\frac{b_{n-k+1}}{2^k} = \frac{b_{n-k}}{2^{k+1}} + \frac{3}{2^{k+1}}$. Значит,

$$b_{n+1} = \frac{b_n}{2} + \frac{3}{2} = \frac{b_{n-1}}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{b_1}{2^n} + \frac{3}{2^n} + \dots + \frac{3}{4} + \frac{3}{2} = \frac{b_1}{2^n} + 3\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) = 3 + \frac{1}{2^{n-1}}.$$

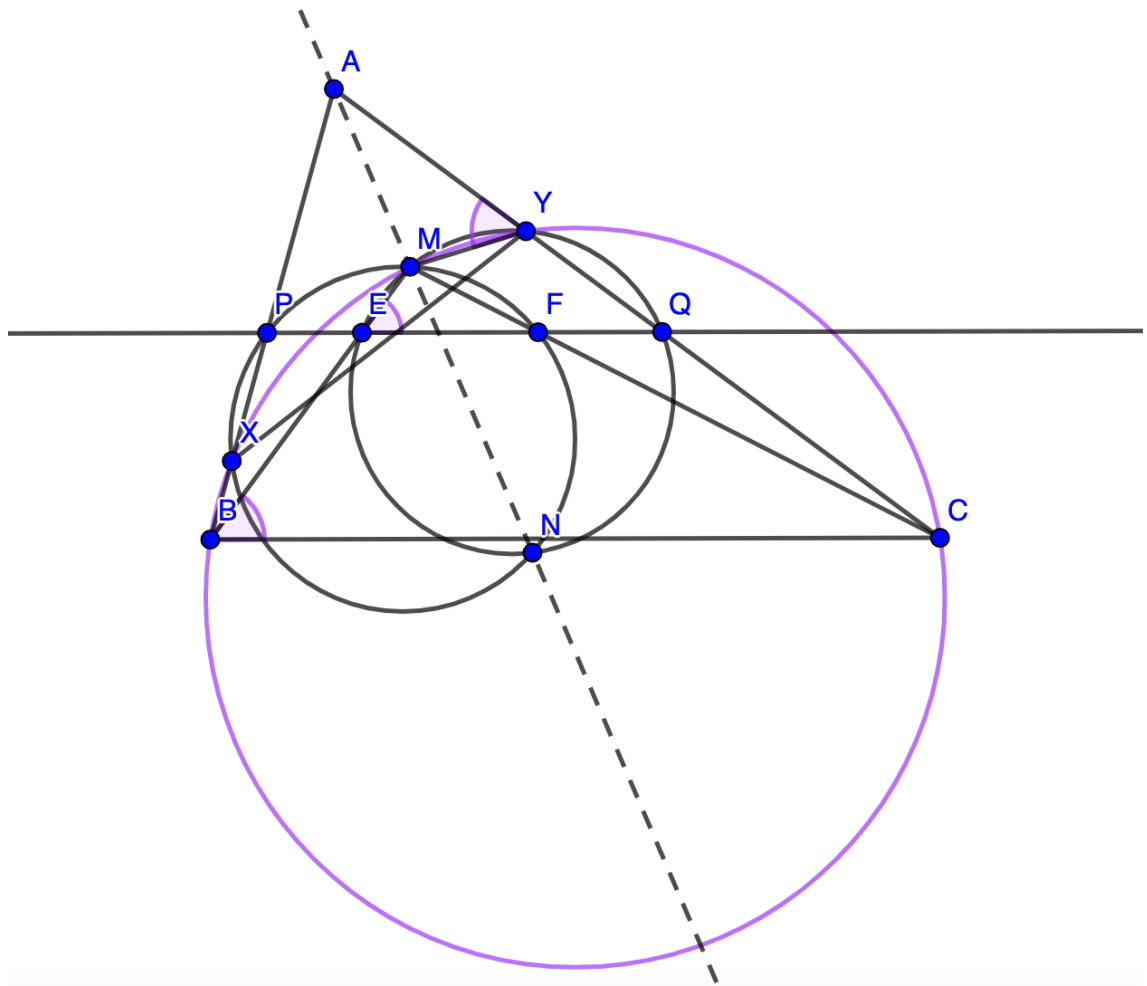
Значит, $b_n = 3 + \frac{1}{2^{n-2}}$. Тогда

$$a_n = \frac{1}{24}(b_n^2 - 1) = \frac{1}{24}\left(9 + 2 \cdot 3 \cdot \frac{1}{2^{n-2}} + \frac{1}{2^{2n-4}} - 1\right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1}}.$$

Заметим, что так как $2^{10} > 10^3$, то $\frac{1}{2^{1000}} < \frac{1}{10^{300}}$ и $\frac{1}{3 \cdot 2^{2000-1}} < \frac{2}{3 \cdot 10^{600}} < \frac{1}{10^{600}}$. Значит, $a_{1000} \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{3} + \frac{1}{10^{300}} + \frac{1}{10^{600}}]$, а значит, с точностью до 0,01 равна 0,33.

5. Прямая, параллельная стороне BC треугольника ABC , пересекает стороны AB и AC в точках P и Q соответственно. Внутри треугольника APQ взята точка M . Отрезки MB и MC пересекают отрезок PQ в точках E и F соответственно. Пусть N — вторая точка пересечения описанных окружностей треугольников PMF и QME . Докажите, что точки A , M и N лежат на одной прямой.

Решение. Обозначим через точки X и Y точки повторного пересечения окружностей PMF и QME со сторонами AB и AC , соответственно.



Так как M, Y, Q и E на одной окружности, $\angle MYA = \angle MEQ$. Так как EF параллельна BC , $\angle MEQ = \angle MBC$. Значит, точки M, Y, B и C лежат на одной окружности. Аналогично, точки M, X, B и C лежат на одной окружности. Значит, на окружности лежат все 5 точек: M, X, Y, B и C . Посчитав степень точки A относительно этой окружности получим, что $AX \cdot AB = AY \cdot AC$. Иными словами, $\frac{AX}{AY} = \frac{AC}{AB}$. Так как PQ параллельна BC , $\frac{AC}{AB} = \frac{AQ}{AP}$. Значит, $\frac{AX}{AY} = \frac{AQ}{AP}$ и $AX \cdot AP = AY \cdot AQ$. Значит, степень точки A относительно окружности $PMFX$ равна степени точки A относительно окружности $QMEY$. Значит, A лежит на их радикальной оси MN . Ч.т.д.