Диагностическая работа. Дистанционный этап

1. N различных натуральных чисел, не превосходящих 2020 (в другом варианте 2027), выписаны по кругу так, что сумма любых двух из них, стоящих через одно, делится на 3. Найдите наибольшее возможное значение N.

Ответ. 1344 (соответственно, 1352).

Решение. Сначала приведём пример на $N = 1344$ (соответственно, $N = 1352$). Заметим, что данное N делится на 4. Возьмём N мест по кругу и покрасим их в белый и красный цвета так: первые два места белые, следующие два красные, следующие два белые, следующие два снова красные и так далее. Заметим, что стоящие через одно места разных цветов. Теперь расставим на белые места числа, дающие остаток 1 при делении на 3, а на красные места — дающие остаток 2 при делении на 3. В первом варианте на белых местах будут стоять числа $1, 4, \ldots, 2014$, а на красных — $2, 5, \ldots, 2015$. Во втором варианте на белых местах будут стоять числа $1, 4, \ldots, 2023$, а на красных — $2, 5, \ldots, 2024$. Видно, что условие будет выполняться.

Докажем, что большего N добиться нельзя. Предположим, что можно. Обозначим числа через $a_1, a_2, \ldots, a_N$ (по часовой стрелке) Рассмотрим несколько случаев.

Пусть N нечётно. Тогда выполнены сравнения

$$a_1 \equiv -a_3 \equiv a_5 \equiv \ldots \equiv \pm a_N \equiv \mp a_2 \ldots \equiv a_{N-1} \equiv -a_1 \pmod 3 :$$

в записи поучаствуют сначала все a_i с нечётными индексами, потом все a_i с чётными, и знак поменяется ровно N раз. Значит, $a_1 \equiv -a_1 \pmod 3$, и следовательно, a_1 делится на 3. Аналогично, все числа делятся на 3, а значит, их не более 673 (675, соответственно).

Пусть N чётно, но не делится на 4. Тогда выполнены сравнения

$$a_1 \equiv -a_3 \equiv a_5 \equiv \ldots \equiv a_{N-1} \equiv -a_1,$$

а значит, a_1 делится на 3. Аналогично, все числа делятся на 3, что опять же приводит к противоречию.

Пусть N делится на 4. Тогда выполнены сравнения

$$a_1 \equiv -a_3 \equiv a_5 \equiv \ldots \equiv -a_{N-1} \equiv a_1.$$

Если a_1 делится на 3, то все числа с нечётными индексами делятся на 3, а значит, их не больше 673 (675, соответственно). Иными словами, $\frac{1}{2}N \leqslant 673$ (или $\frac{1}{2}N \leqslant 675$). Так как $\frac{1}{2}N$ чётно, $\frac{1}{2}N \leqslant 672$ (или $\frac{1}{2}N \leqslant 674$). Противоречие.

Если $a_1 \equiv 1 \pmod 3$, то $a_2 \equiv 2 \pmod 3$, $a_3 \equiv 1 \pmod 3$ и так далее: половина чисел с нечётными индексами даёт остаток 1 при делении на 3, а половина — остаток 2. То же самое получается в случае $a_1 \equiv 2 \pmod 3$.

Для чисел $a_2, \ldots, a_N$ проведём аналогичные рассуждения и получим, что среди них тоже половина даёт остаток 1 при делении на 3, а половина — остаток 2. Значит, всего $\frac{N}{2}$ чисел даёт остаток 2 от деления на 3. Следовательно, $\frac{1}{2}N \leqslant 673$ (или $\frac{1}{2}N \leqslant 676$). Так как $\frac{1}{2}N$ чётно, $\frac{1}{2}N \leqslant 672$ (или $\frac{1}{2}N \leqslant 676$). Противоречие.

2. Полумесяц получен из 2 дуг окружностей. На какое максимальное число частей могут разделить полумесяц n прямых? В первом варианте $n = 7$, во втором варианте $n = 8$.

Ответ. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, то есть 36 и 45, соответственно.

Решение. Будем проводить прямые по очереди. Пусть мы провели k прямых. Следующая может пересекать проведённые прямые не более чем в k точках. Если новая прямая пересекает границу полумесяца ровно два раза, то она пересекает не более $k+1$ частей, а значит, добавляет $k+1$.

Если новая прямая пересекает границу полумесяца больше двух раз, то её перечение с внутренностью полумесяца — это два отрезка. Если первый из них пересекает a старых прямых, а второй — b, то всего прямая пересекает $a+b+2$ части. Так как $a+b \leqslant k$, то добавляется не более $k+2$ частей. Значит, n прямых делят полумесяц на не более чем $1+2+3+\ldots+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$ частей.

Построим пример. Выберем точку X внутри полумесяца и проведём из неё касательные XA и XB ко внутренней дуге (A, B — точки касания). Последовательно выберем n прямых, касающихся дуги AB так, чтобы никакие три не пересекались в одной точке (на каждом шаге у нас будет запрещено лишь конечное число положений). Получится, что все прямые пересекаются строго внутри полумесяца. Из рассуждений выше следует, что при последовательном добавлении этих прямых $k+1$-ая будет добавлять $k+2$ части. Значит, всего частей будет $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

3. В неравнобедренном треугольнике ABC с $\angle B = \alpha$ проведена медиана BM. Точка K на отрезке BC такова, что $AB = BK$. Оказалось, что $\angle BMK = 90^\circ$. Чему может равняться $\angle MBC$? В первом варианте $\alpha = 132^\circ$, во втором $\alpha = 134^\circ$.

Ответ. $90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$, то есть 24° и 23°, соответственно.

Решение. Отразим точку K относительно точки M, обозначим получившуюся точку через L. Заметим, что в треугольнике LBK медиана совпадает с высотой, а значит, $BL = BK = BA$. Рассмторим окружность с центром B и радиусом BL. Градусная мера дуги AK, не содержащей L, равна $360^\circ - \alpha$. Значит, $\angle ALK = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Треугольники KCM и LAM симметричны относительно точки M, а значит, $\angle CKM = \angle ALM = 180^\circ - \frac{1}{2}\alpha$. Следовательно, $\angle BKM = 180^\circ - \angle CKM = \frac{1}{2}\alpha$. Наконец, из суммы углов в треугольнике BKM следует, что $\angle MBK = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha$.

4. На вечеринке некоторые гости знакомы между собой, а некоторые — нет. Известно, что если у двух гостей одинаковое число знакомых среди присутствующих, то они незнакомы, а если разное — то знакомы. Оказалось, что можно найти 5 (в другом варианте 6) попарно знакомых друг с другом гостей и 6 (в другом варианте 7) попарно незнакомых. Какое наименьшее число гостей может быть на вечеринке?

Ответ. 16 (соответственно, 22).

Решение. Обозначим число всех гостей через n. Разобьём всех гостей на группы по количеству их знакомых: отнесём гостей к одной группе, если количества их знакомых совпадают. Заметим, что каждый человек знаком со всеми гостями из других групп и не знаком ни с кем из своей. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — количества людей в первой, второй и т.д. группах. В таком случае у всех из первой группы ровно $n-a_1$ знакомых, у всех из второй — ровно $n-a_2$ и т.д. Значит, все числа $n-a_1, \ldots, n-a_k$ попарно различны, иными словами, числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ попарно различны.

Без ограничения общности, $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$. Из того, что можно найти x попарно знакомых, следует, что $k \geqslant x$. Из того, что можно найти y попарно незнакомых следует, что $a_k \geqslant y$. Значит,

$$n = a_1 + \ldots + a_{k-1} + a_k \geqslant 1 + \ldots + k - 1 + y = \frac{k(k-1)}{2} + y \geqslant \frac{x(x-1)}{2} + y.$$

В первом варианте получается, что $n \geqslant 10 + 6 = 16$, во втором варианте $n \geqslant 15 + 7 = 22$.

Осталось привести пример. В первом варианте задачи положим

$$k = 5, \;\; a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 6.$$

Во втором варианте задачи положим

$$k = 5, \;\; a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 3, a_4 = 4, a_5 = 6.$$

Возьмём $a_1 + \ldots + a_k$ человек и разобьём из на группы размеров $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Определим знакомства следующим образом: два человека знакомы если и только если они входят в разные группы. Тогда условие задачи будет выполяться и мы получим примеры на 16 и 22, соответственно.

5. Рассматриваются треугольники ABC, в которых точка M лежит на стороне AB, $AM = 1269$, $BM = 717$, $CM = 239$ (в другом варианте $AM = 1673$, $BM = 551$, $CM = 239$). Найдите наименьший радиус окружности, описанной около таких треугольников.

Ответ. 2023 (в другом варианте 2048)

Решение. Решим задачу в общем случае при $AM = a$, $BM = b$ и $CM = c$ с ограничением $c < a$ и $c < b$. Пусть K — середина AB и $a > b$. Докажем, что треугольник ABC — тупоугольный с тупым углом C. Для этого достаточно доказать, что медиана меньше половины стороны, к которой она проведена. Действительно, если это выполняется, то, построив окружность на AB как на диаметре, получим, что точка C лежит внутри этой окружности, следовательно, угол C — тупой. Докажем, что $CK < \dfrac{1}{2}AB$. Так как $MK = \dfrac{1}{2}(a-b)$, то по неравенству треугольника $CK < \dfrac{1}{2}(a-b) + c < \dfrac{1}{2}(a-b) + b = \dfrac{1}{2}(a+b) = \dfrac{1}{2}AB$.

Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Так как хорда AB — фиксирована, то радиус будет наименьшим, если угол AOB — наибольший. Так как угол C — тупой, то $\angle ACB = 180^\circ - \dfrac{1}{2}\angle AOB$, то есть угол ACB должен быть наименьший из возможных (для доказательства также можно было воспользоваться теоремой синусов и убыванием синуса на указанном промежутке).

С другой стороны, так как отрезок CM фиксирован, то точка C лежит на окружности с центром в точке M и радиусом c. Докажем, что угол ACB будет наименьшим, если такая окружность касается окружности, описанной около треугольника ABC. Пусть это не так и указанные окружности пересекаются в точках $C1$ и $C2$. Тогда, выбрав точку C на меньшей дуге C_1C_2 (то есть вне большой окружности), получим, что $\angle ACB < \angle AC_1B = \angle AC_2B$, противоречие.

Теперь найдем радиус окружности. Так как окружности касаются, то точки O, M и C лежат на одной прямой. Обозначив искомый радиус через R и использовав теорему Пифагора для треугольников OBK и OMK, получим: $OK^2 = R^2 - \dfrac{(a+b)2}{4}$ и $OK^2 = (R-c)^2 - \dfrac{(a-b)^2}{4}$, откуда $R = \dfrac{ab + c^2}{2c}$. Подсталяя данные из условия находим ответ.

6. Палиндромическим разбиением натурального числа A называется запись A в виде суммы натуральных слагаемых $A = a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n (n \geqslant 1)$, в которой $a_1 = a_n$, $a_2 = a_{n-1}$ и, вообще, $a_i = a_{n+1-i}$ при $1 \leqslant i \leqslant n$. Найдите количество всех палиндромических разбиений числа 50 (в другом варианте 60).

Ответ. 2^{25} (соответственно, 2^{30}).

Решение.

Пусть требуется посчитать количество палиндромических разбиений числа $2n$. Докажем, что количество палиндромических разбиений на нечётное количество слагаемых равно количеству разбиений на чётное количество слагаемых.

Действительно, если $a_1 + \ldots + a_{2k+1}$ — палиндромическое разбиение числа $2n$. Тогда a_{k+1} чётно, так как $a_1 + \ldots + a_{2k+1} = 2(a_1 + \ldots + a_k) + a_{k+1} = 2n$. Значит, $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \dfrac{a_{k+1}}{2} +$

$+\dfrac{a_{k+1}}{2}+\ldots+a_{2k+1}$ также является палиндромических разбиением числа $2n$, но уже на чётное количесво слагаемых.

В обратную сторону, если $a_1+\ldots+a_{2k}$ — палиндромическое разбиение числа $2n$, то $a_1+\ldots+ + a_{k-1} + 2a_k + a_{k+2} + \ldots + a_{2k}$ также является палиндромическим разбиением числа $2n$, но уже на нечётное количество слагаемых.

Теперь скажем, что количество палиндромических разбиений числа $2n$ на чётное количество слагаемых совпадает с количеством неупорядоченных разбиений числа n. Остаётся заметить, что таких разбиений ровно 2^{n-1} штук (2^{n-1} способ расставить перегородки между n шарами).

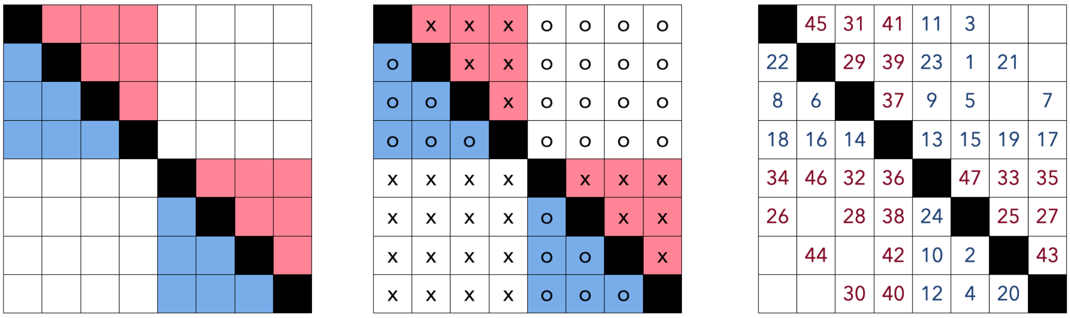
Всего получаем $2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$ палиндромических разбиений.

7. Восемь клеток одной диагонали шахматной доски назовем забором. Ладья ходит по доске, не наступая на одну и ту же клетку дважды и не наступая на клетки забора (промежуточные клетки не считаются посещенными). Какое наибольшее число прыжков через забор может совершить ладья?

Ответ. 47.

Решение. Пусть можно совершить больше 47 прыжков. Будем считать, что изначально доска у нас белая. Раскрасим некоторые клетки в красный и синий цвета так, как показано на рисунке. Всего мы покрасили 24 клетки.

Заметим, что любой прыжок через забор начинается или заканчивается в какой-нибудь покрашенной клетке. Так как каждая покрашенная клетка могла участвовать не более, чем в двух прыжках, прыжков через забор не более 48.



Предположим, что их ровно 48. В таком случае, нет ни одного прыжка из покрашенной клетки в покрашенную. Более того, все прыжки из красных клеток (или в них) совершаются из нижней половины доски (снизу и слева от забора). Аналогичное верно для синих клеток. Пометим каждую клетку крестиком или ноликом, как на рисунке. Из сказанного выше следует, что нет прыжков между по-разному помеченными клетками. Значит, прыжков не более 25, противоречие.

Итого, прыжков не менее 47. Пример на 47 изображён на следующем рисунке: числа показывают порядок посещения клеток.

8. Многочлен $P(x)$ с целыми коэффициентами таков, что $P(-10) = 62$, $P(8) = 44$ (в другом варианте $P(-10) = 63$, $P(8) = 45$). Найдите наименьшее возможное значение $|P(0)|$.

Ответ. 28 (соответственно, 27).

Решение. Докажем, что меньше не получится.

Положим $a = 52$ (во втором варианте $a = 53$). Заметим, что $P(-10) = a-(-10)$ и $P(8) = a-8$. Рассмотрим многочлен $Q(x) = P(x) + x - a$. Ясно, что $Q(-10) = Q(8) = 0$. Следовательно, $Q(x)$ делится на многочлен $(x + 10)(x - 8)$. Значит, $Q(x) = R(x)(x + 10)(x - 8)$, где $R(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами. Иными словами, $P(x) = a - x + R(x)(x + 10)(x - 8)$. Подставим в это выражение $x = 0$. Получим, что $P(0) = a - 80 \cdot R(0)$. Число $R(0)$ целое.

Если $R(0) \leqslant 0$, то $|P(0)| \geqslant a > 28$. Если $R(0) > 0$, то $|P(0)| = 80 \cdot R(0) - a \geqslant 80 - a$. В первом варианте $80 - a = 28$, во втором $80 - a = 27$. Равенство достигается, если $R(0) = -1$.

Осталось привести пример соответствующего многочлена. Для этого положим $R(x) = -1$. Получится $P(x) = a - x - (x + 10)(x - 8)$.