Диагностическая работа. Дистанционный этап

1. N различных натуральных чисел, не превосходящих 2020 (в другом варианте 2027), выписаны по кругу так, что сумма любых двух из них, стоящих через одно, делится на 3. Найдите наибольшее возможное значение N.

   Ответ. 1344 (соответственно, 1352).

   Решение. Сначала приведём пример на $N = 1344$ (соответственно, $N = 1352$). Заметим, что данное N делится на 4. Возьмём N мест по кругу и покрасим их в белый и красный цвета так: первые два места белые, следующие два красные, следующие два белые, следующие два снова красные и так далее. Заметим, что стоящие через одно места разных цветов. Теперь расставим на белые места числа, дающие остаток 1 при делении на 3, а на красные места — дающие остаток 2 при делении на 3. В первом варианте на белых местах будут стоять числа $1; 4; \ldots; 2014$, а на красных — $2; 5; \ldots; 2015$. Во втором варианте на белых местах будут стоять числа $1; 4; \ldots; 2023$, а на красных — $2; 5; \ldots; 2024$. Видно, что условие будет выполняться.

   Докажем, что большего N добиться нельзя. Предположим, что можно. Обозначим числа через $a_1; a_2; \ldots; a_N$ (по часовой стрелке) Рассмотрим несколько случаев.

   Пусть N нечётно. Тогда выполнены сравнения

   $$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \ldots \quad a_N \quad a_2 \ldots \quad a_{N\ 1} \quad a_1 \pmod 3 :$$

   в записи поучаствуют сначала все a_i с нечётными индексами, потом все a_i с чётными, и знак поменяется ровно N раз. Значит, $a_1 \quad a_1 \pmod 3$, и следовательно, a_1 делится на 3. Аналогично, все числа делятся на 3, а значит, их не более 673 (675, соответственно).

   Пусть N чётно, но не делится на 4. Тогда выполнены сравнения

   $$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \ldots \quad a_{N\ 1} \quad a_1;$$

   а значит, a_1 делится на 3. Аналогично, все числа делятся на 3, что опять же приводит к противоречию.

   Пусть N делится на 4. Тогда выполнены сравнения

   $$a_1 \quad a_3 \quad a_5 \quad \ldots \quad a_{N\ 1} \quad a_1.$$

   Если a_1 делится на 3, то все числа с нечётными индексами делятся на 3, а значит, их не больше 673 (675, соответственно). Иными словами, $\frac{1}{2}N$ 6 673 (или $\frac{1}{2}N$ 6 675). Так как $\frac{1}{2}N$ чётно, $\frac{1}{2}N$ 6 672 (или $\frac{1}{2}N$ 6 674). Противоречие.

   Если $a_1 \quad 1 \pmod 3$, то $a_2 \quad 2 \pmod 3$, $a_3 \quad 1 \pmod 3$ и так далее: половина чисел с нечётными индексами даёт остаток 1 при делении на 3, а половина — остаток 2. То же самое получается в случае $a_1 \quad 2 \pmod 3$.

   Для чисел $a_2; \ldots; a_N$ проведём аналогичные рассуждения и получим, что среди них тоже половина даёт остаток 1 при делении на 3, а половина — остаток 2. Значит, всего $\frac{N}{2}$ чисел даёт остаток 2 от деления на 3. Следовательно, $\frac{1}{2}N$ 6 673 (или $\frac{1}{2}N$ 6 676). Так как $\frac{1}{2}N$ чётно, $\frac{1}{2}N$ 6 672 (или $\frac{1}{2}N$ 6 676). Противоречие.

2. Полумесяц получен из 2 дуг окружностей. На какое максимальное число частей могут разделить полумесяц n прямых? В первом варианте $n = 7$, во втором варианте $n = 8$.

   Ответ. $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$, то есть 36 и 45, соответственно.