# Решения очного этапа диагностической работы

**1.** Можно ли разбить все числа от 1 до 100 на три группы так, чтобы сумма всех чисел первой группы делилась на 102, второй — на 203, а третьей — на 304?

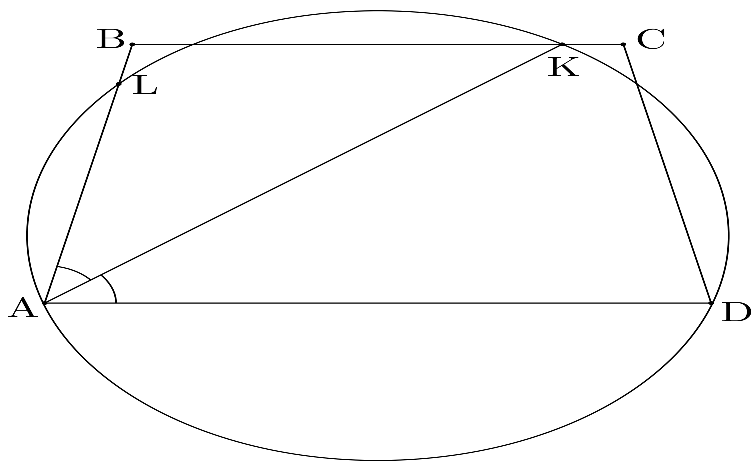
**Решение.** Предположим, что такое разбиение существует. Обозначим суммы чисел в первой, второй и третьей группках через $102x$, $203y$ и $304z$ соответственно. Заметим, что сумма чисел от 1 до 100 равна $(100 \cdot 101)/2 = 5050$ и делится на 101. Ясно, что $102x + 203y + 304z = 5050$. Тогда $x + y + z = 5050 - 101(x + 2y + 3z)$ тоже делится на 101. Значит, $x + y + z \geqslant 101$. Следовательно,

$$5050 = 102x + 203y + 304z = 102(x + y + z) + 101y + 202z \geqslant 102 \cdot 101 = 10302.$$

Противоречие. Значит, разбить нельзя.

**2.** Биссектриса угла $A$ равнобедренной трапеции $ABCD$ пересекает основание $BC$ в точке $K$. Описанная окружность треугольника $AKD$ пересекает сторону $AB$ в точке $L$. Докажите, что $BL = KC$.

**Решение.**




Пусть $\angle BAD = \alpha$, $\angle KDC = \varphi$. Так как трапеция $ABCD$ равнобедренная, $\angle ABC = \angle BCD = 180° - \alpha$. По сумме углов треугольника $KCD$, $\angle CKD = 180° - \angle KCD - \angle KDC = \alpha - \varphi$. Так как четырёхугольник $ALKD$ вписанный, $\angle LKD = 180° - \alpha$. Из того, что угол $BKC$ развёрнутый, следует, что $\angle BKL = 180° - \angle LKD - \angle CKP = \varphi$. По сумме углов треугольника $BKL$, $\angle BLK = 180° - \angle LBK - \angle LKB = \alpha - \varphi$.

Так как $AK$ — биссектриса угла $BAD$, дуги $LK$ и $KD$ окружности $ALKD$ равны. Значит, выполнено равенство отрезков $LK = KD$. Выше мы доказали, что $\angle BLK = \alpha - \varphi = \angle CKD$, а также $\angle BKL = \varphi = \angle CDK$. Следовательно, треугольники $BLK$ и $CKD$ равны по двум сторонам и углу между ними. Значит, $BL = KC$.

**3.** На праздник собрались несколько человек. Среди каждых четырех из них есть либо трое попарно знакомых, либо трое попарно незнакомых. Докажите, что всех собравшихся можно разбить на две группы так, что в одной группе все друг с другом знакомы, а в другой никто ни с кем не знаком.

**Решение.** Назовём группу людей «удачной», если все люди в ней попарно знакомы. Пусть $M$ — удачная группа максимального размера (если удачных групп максимального размера несколько, выберем в качестве $M$ любую из них). Докажем, что любые два человека не из $M$ попарно незнакомы, этого будет достаточно для решения задачи.

Предположим противное. Пусть $A$ и $B$ не относятся к группе $M$ и знакомы между собой. Если $A$ знаком со всеми людьми из $M$, то его можно было бы добавить к $M$ так, чтобы группа осталась удачной. Однако, число человек в $M$ максимально, противоречие. Значит, $A$ незнаком с кем-то из $M$, пусть с $C$. Если $B$ незнаком с каким-то другим человеком $D$ из $M$, то среди $A$, $B$, $C$, $D$ не может быть ни троих попарно знакомых, ни троих попарно незнакомых.

Тогда единственный человек из $M$, с которым $B$ может быть незнаком — это $C$. При этом, если $B$ знаком со всеми, то его можно было бы добавить к $M$, а значит, $B$ должен быть незнаком с $C$. Теперь, если $A$ незнаком с кем-то ещё в $M$, пусть, $D$, то среди $A$, $B$, $C$, $D$ не может быть ни троих попарно знакомых, ни троих попарно незнакомых. Значит, $A$ и $B$ знакомы в $M$ со всеми кроме $C$. Но тогда если убрать из $M$ человека $C$, а добавить $A$ и $B$, то полученная группа будет удачной, противоречие. Значит, любые два человека не из $M$ попарно незнакомы.

**4.** В выражении $(x^4+x^3-3x^2+x+2)^{2023}$ раскрыли скобки и привели подобные слагаемые. Докажите, что при некоторой степени переменной $x$ получился отрицательный коэффициент.

**Решение.** Обозначим получившиеся коэффициенты при $x^i$ через $a_i$. Тогда

$$f(x) = (x^4 + x^3 - 3x^2 + x + 2)^{2023} = x^{4\cdot 2023} + a_{4\cdot 2023-1}x^{4\cdot 2023} + \ldots + a_1x + a_0.$$

Пусть все $a_i \geqslant 0$. Заметим, что тогда $f(1) = 1+a_{4\cdot 2023-1}+\ldots+a_1+a_0 > a_0 = f(0)$. С другой стороны, $f(1) = (1^4 + 1^3 - 3\cdot 1^2 + 1 + 2)^{2023} = 2^{2023} = (0^4 + 0^3 - 3\cdot 0^2 + 0 + 2)^{2023} = f(0)$. Противоречие.

**5.** В клетках таблицы $300\times 300$ расположены числа 1 и $-1$ таким образом, что в каждом из прямоугольников $3\times 5$ и $5\times 3$ модуль суммы чисел больше 3. Найдите наименьший возможный модуль суммы всех чисел в таблице.

**Решение.** Предположим, что модуль суммы чисел во всей таблице меньше 30000.

Заметим, что сумма в каждом из прямоугольнике $3\times 5$ и $5\times 3$ — это сумма 15 нечётных чисел, а значит, она нечётна. Следовательно, её модуль не меньше 5.

Заметим, что если в двух прямоугольниках размера $3\times 5$ или $5\times 3$ суммы имеют разные знаки, то эти суммы отличаются хотя бы на 10.

Рассмотрим прямоугольники $X$ и $Y$ размера $3\times 5$ (из трёх строк и пяти столбцов) такие, что $Y$ получается из $X$ параллельным переносом вправо на 1 клетку. Разность сумм в $X$ и $Y$ — это разность суммы в трёх левых клетках $X$ и суммы в трёх правых клетках $Y$, и следовательно, эта разность по модулю не больше 6. Значит, знаки сумм в $X$ и $Y$ совпадают.

Следовательно, для каждой полоски $3\times 300$ все прямоугольники размера $3\times 5$, содержащиеся в ней, имеют один и тот же знак. Аналогично, для каждой полоски $300\times 3$ все прямоугольники размера $5\times 3$, содержащиеся в ней, имеют один и тот же знак.

Разобьём всю доску на прямоугольники $3\times 5$. Если суммы в каждом из них имеют один и тот же знак, то модуль суммы во всей таблице не меньше 30000, противоречие. Значит, найдутся два прямоугольника разного знака.

Докажем, что найдутся две полоски $3\times 300$, пересекающиеся по полоске $2\times 300$, такие, что во всех содержащихся в первой полоске прямоугольниках $3\times 5$ суммы отрицательны, а во всех, содержащихся во второй — положительны. Пусть не так. Без ограничения общности предположим, что суммы во всех прямоугольниках $3\times 5$, содержащихся в первых трёх строках, положительны. Тогда суммы во всех прямоугольниках $3\times 5$, содержащихся в строках $2, 3, 4$, положительны, тогда во всех, содержащихся в строках $3, 4, 5$, положительны, и так далее. Тогда во всех прямоугольниках $3\times 5$ суммы положительны, противоречие.

Без ограничения общности, во всех прямоугольниках $3\times 5$, содержащихся в строках $k, k+1, k+2$, суммы положительны, а во всех прямоугольниках $3\times 5$, содержащихся в строках $k+1, k+2, k+3$ — отрицательны (иначе отразим всю таблицу относительно её горизонтальной оси симметрии).

Аналогично, во всех прямоугольниках $5\times 3$, содержащихся в столбцах $l, l+1, l+2$, суммы положительны, а во всех прямоугольниках $5\times 3$, содержащихся в строках $l+1, l+2, l+3$ — отрицательны (иначе отразим всю таблицу относительно её вертикальной оси симметрии).

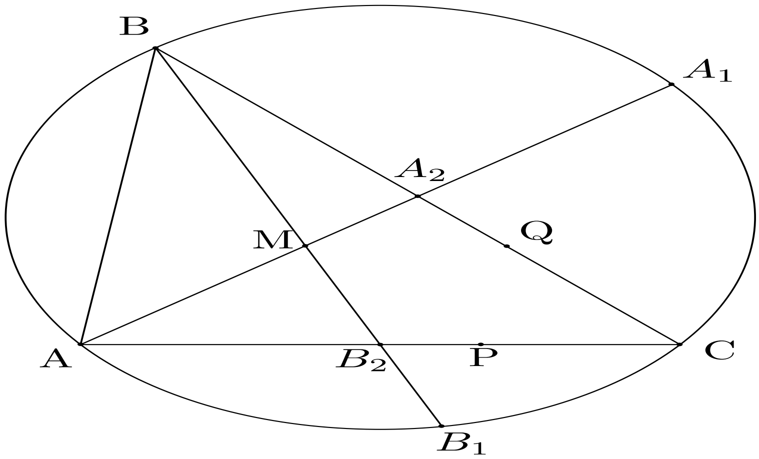
Рассмотрим два таких прямоугольника $A$ и $B$ размера $3\times 5$, что $A$ содержится в строках $k, k+1, k+2$, $B$ содержится в строках $k+1, k+2, k+3$ и $B$ получается из $A$ переносом на 1 клетку вниз. Заметим, что разность сумм в $A$ и $B$ не меньше 10. С другой стороны, она равна разности сумм в пяти верхних клетках $A$ и пяти нижних клетках $B$. Так как сумма в пяти верхних клетках А не больше 5, а сумма в пяти нижних клетках В не меньше $-5$, их разность не превосходит 10. Следовательно, все эти неравенства обращаются в равенства: в пяти верхних клетках $A$ стоят единицы, а в пяти нижних клетках $B$ — минус единицы.

Рассматривая все такие пары $A$ и $B$, получим, что во всех клетках строки $k$ стоит 1, а во всех клетках строки $k+4$ стоит $-1$. Аналогично, во всех клетках столбца $l$ стоит 1, а во всех клетках столбца $l+4$ стоит $-1$. Рассмотрим клетку на пересечении строки $k$ и столбца $l+4$. С одной стороны, на ней стоит 1, а с другой — $-1$. Мы пришли к противоречию.

Итого, модуль суммы чисел во всей таблице не менее 30000. Построим пример. Для этого введём систему координат: первая координата клетки — номер строки, вторая — номер столбца. Поставим на все клетки с суммой координат, делящейся на 3, минус единицу, а на все остальные клетки — единицу. Тогда в каждом прямоугольнике $1\times 3$ и $3\times 1$ сумма чисел равна 1. Следовательно, в каждом прямоугольнике $5\times 3$ и $3\times 5$ сумма чисел равна 5.

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | ⋯ | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| | | ⋮ | | | | | | ⋮ | | |
| -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |
| 1 | 1 | -1 | 1 | 1 | ⋯ | 1 | -1 | 1 | 1 | -1 |
| -1 | 1 | 1 | -1 | 1 | | 1 | 1 | -1 | 1 | 1 |
| 1 | -1 | 1 | 1 | -1 | | -1 | 1 | 1 | -1 | 1 |

**6.** В треугольнике $ABC$ продолжения медиан из вершин $A$ и $B$ пересекают описанную окружность в точках $A_1$ и $B_1$ соответственно. На стороне $AC$ выбрана точка $P$, а на стороне $BC$ — точка $Q$ так, что $AP = 2PC$, $BQ = 2QC$. Докажите, что $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.




**Решение 1.** Обозначим точку пересечения медиан треугольника $ABC$ через $M$. Пусть $A_2$ и $B_2$ — середины сторон $BC$ и $AC$ соответственно. Заметим, что $AM/AA_2 = 2/3 = AP/AC$. Значит, треугольники $AMP$ и $AA_2C$ подобны, и следовательно, $\angle APM = \angle ACA_2 = \angle ACB$. Аналогично, $\angle BQM = \angle ACB$.

Заметим, что $\angle ACB = \angle AA_1B$, так как они опираются на дугу $AB$. Значит, $\angle BQM = \angle ACB = \angle AA_1B = \angle BA_1M$ и четырёхугольник $BA_1QM$ вписанный. Следовательно, $\angle BQA_1 = \angle BMA_1$. Аналогично, $\angle APB_1 = \angle AMB_1$. Следовательно, так как углы $AMB_1$ и $BMA_1$ — вертикальные, $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.

**Решение 2.** Обозначим точку пересечения медиан треугольника $ABC$ через $M$. Пусть $A_2$ и $B_2$ — середины сторон $BC$ и $AC$ соответственно.

Заметим, что $\angle B_1CA = \angle ABB_1$, так как они опираются на дугу $AB_1$. Значит, $\angle B_1CB_2 = \angle B_1CA = \angle ABB_1 = \angle ABB_2$. Также заметим, что $\angle CB_2B_1 = \angle BB_2A$, так как эти углы вертикальные. Следовательно, треугольники $ABB_2$ и $B_1CB_2$ подобны.

Заметим, что $BM : MB_2 = CP : PB_2 = 2 : 1$. Значит, точка $M$ в треугольнике $ABB_2$ соответствует точке $P$ в треугольнике $B_1CB_2$, и следовательно, $\angle B_1PB_2 = \angle B_2MA$. Значит, $\angle APB_1 = \angle B_1PB_2 = \angle B_2MA$. Аналогично, $\angle BQA_1 = \angle A_2MB$. Следовательно, так как углы $AMB_2$ и $BMA_2$ — вертикальные, $\angle APB_1 = \angle BQA_1$.