Решения дистанционного этапа диагностической работы

1. Натуральные числа a, b, c таковы, что $ab \vdots 2c$, $ac \vdots 3b$, $bc \vdots 5a$ (в других вариантах $ac \vdots 5b$, $bc \vdots 7a$ и $ac \vdots 5b$, $bc \vdots 11a$). Найдите наименьшее возможное значение abc.

Ответ. 900 (в других вариантах 4900 и 12100, соответственно)

Решение. Разберём первый вариант задачи. Остальные решаются аналогично.

Из условия следует, что $ab = 2cm$ и $ac = 3bn$ для некоторых целых m и n. Перемножив эти равенства, получим, что $a^2bc = 6bcmn$. Сократим на bc и увидим, что $a^2 = 6mn$, и значит, a^2 делится на 2 и на 3. Так как числа 2 и 3 простые, само a тоже делится на 2 и на 3. Значит, $a \geqslant 6$. Аналогично, $b \geqslant 10$ и $c \geqslant 15$. Следовательно, $abc \geqslant 6 \cdot 10 \cdot 15 = 900$. Значение 900 достигается в случае, когда все неравенства выше обращаются в равенства.

2. Ваня собрал из n^3 белых единичных кубиков большой куб. У получившегося большого куба поверхность состоит из единичных квадратиков. Некоторые из этих квадратиков (но не все) Ваня покрасил красным. Когда Маша разобрала большой куб, она обнаружила, что ровно m^3 единичных кубиков целиком белые. Какую наибольшую площадь мог покрасить Ваня? (Число m дано, а n неизвестно.)

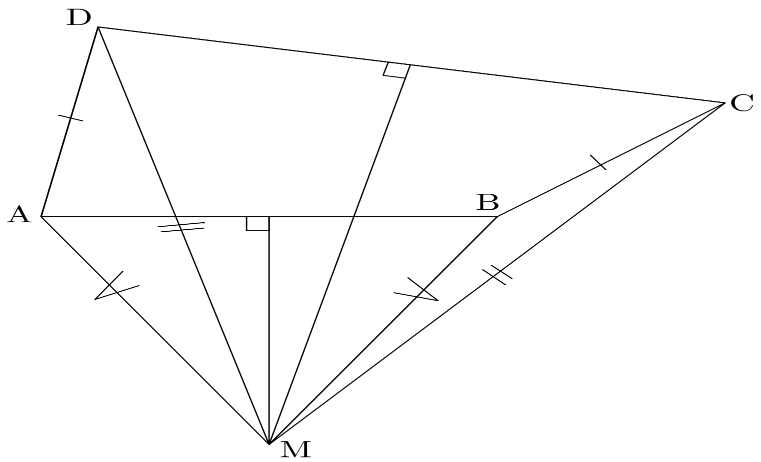
Ответ. $6(m+2)^2 - 1$

Решение. Заметим, что все $(n-2)^3$ внутренних кубика точно белые. Значит, $m^3 \geqslant (n-2)^3$ и $n \leqslant m+2$. Тогда площадь поверхности всего куба $6n^2 \leqslant 6(m+2)^2$, и так как как минимум один квадратик на ней остался белым, красным закрашено не более $6(m+2)^2 - 1$. Равенство достигается в случае, когда у куба со стороной $m+2$ закрасили всю поверхность, кроме одной грани одного углового кубика.

3. В четырёхугольнике $ABCD$ $\angle A = 85°, \angle B = \alpha > 90°, AD = BC$. Серединные перпендикуляры к сторонам AB и CD пересекаются в точке M. Найдите $\angle MAB$.

Ответ. $180° - (85° + \alpha)/2$

Решение.



Поскольку $MA = MB$, $MC = MD$, треугольники MAD и MBC равны по трём сторонам. Заметим, что эти треугольники ориектированы одинаково: в противном случае $\angle A = \angle B$. Пусть $\varphi = \angle MAB$. Тогда $\angle MAD = \varphi + 85°$, а $\angle MBC = 360° - \varphi - \alpha$. Значит, $\varphi + 85° = 360° - \varphi - \alpha$ и $\varphi = 180° - (85° + \alpha)/2$.

4. Компьютер печатает значения выражения $f(n) = n^2 - 23n + 137$ (в других вариантах $n^2 - 21n + 115$ и $n^2 - 19n + 95$) при всех $n = 1, 2, ..., 10000$. Какое наибольшее количество простых чисел он может напечатать подряд?

Ответ. 8

Решение. Посмотрим на исходное выражение по модулю 5. Заметим, что при n дающем остатки $1, 2$ (в других вариантах $0, 1$ и $4, 0$ соответственно) всё выражение делится на 5. Функция $f(n)$ принимает значение 5 в двух точках: 11 и 12 (в других вариантах $10, 11$ и $9, 10$ соответственно). Значит, среди любых девяти напечатанных подряд чисел найдётся делящееся на 5 и не равное 5. Следовательно, напечатанных подряд простых чисел не более 8.

Осталось заметить, что значения функции $f(n)$ в точках от 8 до 15 (в других вариантах от 7 до 14 и от 6 до 13 соответственно) — простые.

5. На доске написаны числа 5, 11, 17 (в другом варианте 5, 8, 11). За одну операцию можно из суммы двух чисел на доске вычесть третье, записать результат на доску, и стереть то число, которое вычиталось. Через несколько таких операций наименьшее из трёх чисел стало равно n. Чему равны остальные два числа?

Ответ. $n+6$ и $n+12$ (в других вариантах $n+3$ и $n+6$)

Решение. Пусть на доске в какой-то момент написаны числа $a, a+x$ и $a+2x$. При стирании a получится тройка $a+x$, $a+2x$, $a+3x$; при стирании $a+x$ ничего не изменится; при стирании $a+2x$ получится тройка $a-x$, a, $a+x$. Итого, мы в любом случае получим тройку такого же вида, только с изменившимся a. Значит, в конце получится тройка b, $b+x$ и $b+2x$ для некоторого b.

Числа 5, 11, 17 соответствуют $a=5$, $x=6$. Если наименьшее число станет равно n, то оставшиеся будут равны $n+6$ и $n+12$.

Числа 5, 8, 11 соответствуют $a=5$, $x=3$. Если наименьшее число станет равно n, то оставшиеся будут равны $n+3$ и $n+6$.

6. В свободное от занятий по математике время Петя разрезает выпуклые многоугольники по прямой линии. Сегодня он приготовил для себя k девятиугольников, и после занятий разреза́л их (и получающиеся из них многоугольники) за столом до вечера. Вечером Петя сходил на кружок по математике и, вернувшись, обнаружил, что все многоугольники были уничтожены Васей. Но Петя не зря изучает математику — перед уходом на кружок он заметил, что среди многоугольников у него за столом сегодня ни в какой момент не было ни треугольников, ни четырехугольников. Помогите Пете — найдите наибольшее число многоугольников, которые мог уничтожить Вася.

Ответ. $5k$

Решение. Каждым разрезом Петя добавляет 1 к количеству многоугольников и не более 4 к сумме количества вершин многоугольников. Изначально эта сумма равна $9k$. Если всего Петя сделал n разрезов, то в конце эта сумма не превосходит $9k+4n$. С другой стороны, в каждом многоугольнике не менее 5 вершин, а значит, эта сумма не меньше $5(k+n)$. Следовательно, $9k+4n \geqslant 5(k+n)$ и $n \leqslant 4k$.

Покажем, как Петя может проделать $4k$ операций. Для этого он каждый раз будет брать многоугольник с $t \geqslant 6$ вершинами и отрезать от него прямой, не проходящей через его вершины, пятиугольник. Тогда из t-угольника будет получаться пятиугольник и $t-1$-угольник.

Пусть после $n<4k$ операций не найдётся многоугольника с более, чем 5 вершинами. Тогда на столе лежат $k+n$ пятиугольников. При этом суммарное количество их вершин равно $k+4n$. Значит, $5(k+n)=k+4n$ и $n=4k$, противоречие.

7. Сколькими способами можно расставить в строку буквы К, О, Т, К, О, Т так, чтобы нашлись две одинаковые буквы, стоящие рядом?

Ответ. 60

Решение.

Обозначим за A множество слов, в которых две буквы К идут подряд, B — слова с подряд идущими буквами О, а C — слова с подряд идущими буквами Т.

Мы ищем количество всех слов с двумя соседними совпадающими буквами, то есть количество слов в объединении этих трёх множеств — $|A\cup B\cup C|$. По формуле включения-исключения оно равно:

$$|A\cup B\cup C| = |A|+|B|+|C|-|A\cap B|-|A\cap C|-|B\cap C|+|A\cap B\cap C|.$$

Заметим, что из симметричности множеств A, B и C верны равенства $|A|=|B|=|C|$ и $|A\cap B| = |A\cap C| = |B\cap C|$.

В множестве A содержатся слова, в которых буквы К стоят подряд. «Склеим» их и рассмотрим количество слов из пяти букв: КК, О, Т, О, Т. Оно равно $|A| = \dfrac{5!}{2\cdot 2}$ (деления на 2 происходят из-за того, что перестановки букв О и Т между собой новых слов не создают).

Аналогично одновременной «склейкой» букв К и «склейкой» букв О для множества $A \cap B$ получим $|A \cap B| = \dfrac{4!}{2}$, а после «склейки» букв К в букву КК, О — в ОО и Т — в ТТ: $|A \cap B \cap C| = 3!$.

В итоге имеем $|A \cup B \cup C| = 3|A| - 3|A \cap B| + |A \cap B \cap C| = 3 \cdot 30 - 3 \cdot 12 + 6 = 60$.

8. На плоскости отмечено несколько точек. Оказалось, что есть прямая, на которой лежит ровно m отмеченных точек, прямая, на которой лежит ровно $m-1$ отмеченных точек, ..., прямая, на которой лежит ровно 1 отмеченная точка. При каком наименьшем числе отмеченных точек возможна такая ситуация?

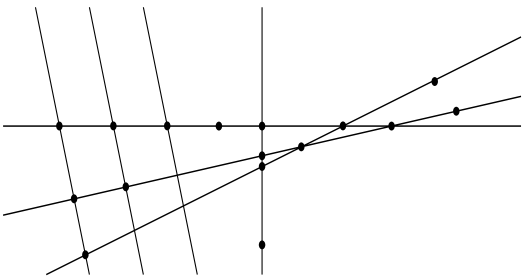
Ответ. 16, 20 и 25 точек при $m = 7$, $m = 8$ и $m = 9$, соответственно

Решение. Разберём задачу для $m = 7$. Будем называть n-прямой такую прямую, на которой лежит ровно n отмеченных точек. Рассмотрим 6-прямую. Так как она имеет не более одной общей точки с 7-прямой, то на ней есть ещё хотя бы 5 новых отмеченных точек (не встречающихся на 7-прямой). В свою очередь, на 5-прямой есть ещё хотя бы 3 новые точки, т. к. не более одной из отмеченных на ней точек лежит на 6-прямой, и ещё не более одной — на 7-прямой. Аналогично, на 4-прямой есть ещё хотя бы одна новая точка. Таким образом, всего точек не менее $7 + 5 + 3 + 1 = 16$.

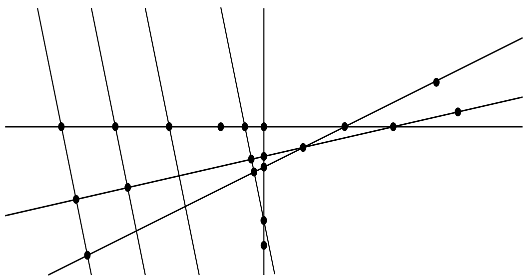
Для $m = 8$ аналогично получим, что всего точек не менее $8 + 6 + 4 + 2$, а для $m = 9$ — что точек не менее $9 + 7 + 5 + 3 + 1$.

Примеры на 16, 20 и 25 точек при $m = 7$, $m = 8$ и $m = 9$, соответственно, изображены на рисунке ниже.

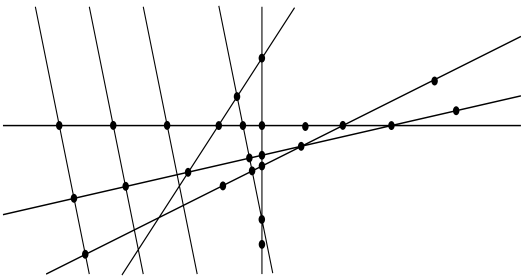
m=7



m=8

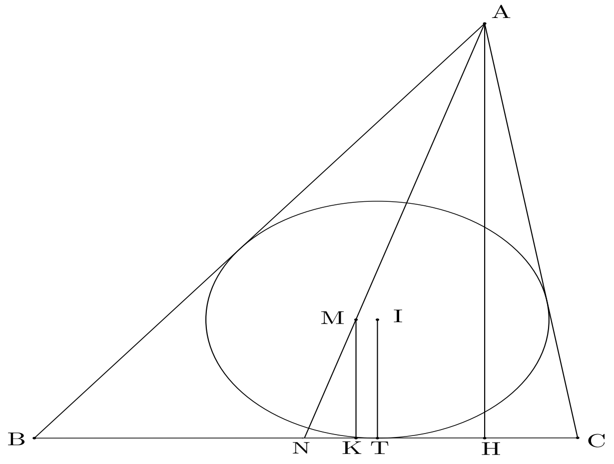


m=9



9. В треугольнике ABC вписанная окружность с центром I касается стороны BC в точке T. Точку пересечения медиан треугольника ABC обозначили через M. Оказалось, что $BT = x$, $CT = y$, а IM параллельна BC. Найдите сторону AB.

Ответ. $\dfrac{3x + y}{2}$



Решение. Опустим из вершины A высоту AH. Пусть K — основание перпендикуляра из точки M на BC. Обозначим середину BC через N. Заметим, что $NA/NM = 3$ и треугольники NAH и NMK подобны. Следовательно, $AH = 3MK$, а раз IM параллельна BC, $AH = 3MK = 3IT$.

Посчитаем площадь треугольника ABC. С одной стороны, это $AH \cdot BC/2 = 3/2 \cdot IT \cdot BC$. С другой стороны, это произведение радиуса вписанной окружности и полупериметра, то есть $(AB + BC + AC) \cdot IT/2$. Следовательно, $(AB + BC + AC) \cdot IT/2 = 3/2 \cdot IT \cdot BC$. Домножив на 2 и сократив на IT, получим, что $AB + BC + AC = 3BC$. По формуле для отрезков касательных $CT = (AB + BC + AC)/2 - AB = 3BC/2 - AB$. Значит, $AB = 3/2BC - CT = 3/2(x + y) - y$.

10. Давид выписал в тетрадку несколько различных подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Оказалось, что любые три дают в объединении $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Какое максимальное число подмножеств мог выписать Давид?

Ответ. $3n + 1$

Решение. Пусть у Давида получилось выписать $3n + 2$ подмножества. Заменим в тетрадке каждое выписанное подмножество на его дополнение. Тогда никакие три новых подмножества не могут пересекаться, а следовательно, каждое натуральное число $k \leqslant 2n$ содержится в не более чем двух новых подмножествах.

Пусть $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_{3n+2}$ — размеры новых подмножеств. Тогда $x_1 + \ldots + x_{3n+2} \leqslant 4n$. С другой стороны, оценим x_i. Ясно, что $x_1 \geqslant 0$. Заметим, что $x_2 \geqslant 1$, в противном случае $x_1 = x_2 = 0$, и тогда пустое подмножество выписано дважды. Значит, $x_2, x_3, \ldots, x_{2n+1} \geqslant 1$. Покажем, что $x_{2n+2} \geqslant 2$. Действительно, если $x_{2n+2} \leqslant 1$, то среди выписанных подмножеств $2n + 2$ содержат не более одного элемента, а всего таких подмножеств $2n + 1$. Значит, $x_{2n+2}, \ldots, x_{3n+2} \geqslant 2$. Итого, $x_1 + \ldots + x_{3n+2} \geqslant 2n + 2(n + 1) = 4n + 2$, противоречие.

Построим пример на $3n$ подмножеств: выпишем $\{1, 2, \ldots, 2n\}$, все подмножества из $2n-1$ элементов, и подмножества из $2n - 2$ элементов вида $\{1, 2, \ldots, 2n\} \backslash \{2k - 1, 2k\}$ для натурального $k \leqslant n$.