LIX УРАЛЬСКИЙ ТУРНИР ЮНЫХ МАТЕМАТИКОВ. ВЛАДИМИР, 06.11–12.11.2022

КОМАНДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА 07.11.2022
ЗАДАНИЯ ДЛЯ 8 КЛАССА

1. В спортивной секции 21 человек. На каждой из последних двух тренировок участники разбивались на три команды по 7 человек. Докажите, что есть три человека, которые оба раза были в одной команде.

2. Можно ли заполнить клетки таблицы 2020×2020 натуральными числами от 1 до $4\,080\,400$ так, чтобы сумма чисел в каждой строке, начиная со второй, была на 1 больше, чем сумма чисел во всех предыдущих строках?

3. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота AH и отмечены середины A_1, B_1 и C_1 сторон BC, CA и AB соответственно. Точка K симметрична точке B_1 относительно прямой BC. Докажите, что прямая C_1K делит отрезок HA_1 пополам.

4. Каждую клетку доски 2022×2022 красят в чёрный или белый цвет. В некоторые клетки ставят хромых ферзей. Хромой ферзь с клетки A бьёт клетку B, если клетки A и B находятся на одной линии (горизонтали, вертикали или диагонали) и все клетки этой линии от A до B включительно покрашены в один цвет. При каком наибольшем k можно покрасить доску и расставить на ней k хромых ферзей так, чтобы они не били друг друга?

5. На столе стоит несколько гирь суммарного веса s. Назовём гирю *раздвоителем*, если после её удаления все остальные гири можно разбить на две группы, суммарный вес каждой из которых не больше $s/2$. Докажите, что вес самого большого раздвоителя больше суммы весов всех нераздвоителей.

6. Высоты AA_1, BB_1 и CC_1 остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке H. Прямые AA_1 и B_1C_1 пересекаются в точке X. Перпендикуляр к AC, проведённый через точку X, пересекает сторону AB в точке Y. Докажите, что прямая YA_1 делит отрезок BH пополам.

7. *Нечётная раскраска графа* – это такая раскраска множества его вершин в несколько цветов, что любые две соседние вершины покрашены в разный цвет и при этом для каждой вершины можно указать цвет, в который покрашено нечётное число её соседей. Барон Мюнхгаузен нарисовал граф и создал нечётную раскраску его вершин в 1022 цвета. «Вы можете мне не поверить, друзья, — говорит барон, — но на этом графе не существует нечётных раскрасок с меньшим числом цветов. Однако после того как я добавил всего одну вершину и соединил её с некоторыми вершинами этого графа, для нечётной раскраски мне понадобилось всего три цвета». Не обманывает ли нас барон?

8. Докажите, что нечётное число $p > 1$ — простое тогда и только тогда, когда среди любых $\frac{p+1}{2}$ различных натуральных чисел можно найти два числа, сумма которых хотя бы в p раз больше их наибольшего общего делителя.