# Диагностическая работа, дистанционный этап

**1.1.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями, если $\angle BAC = \angle CBD, \angle ACD = \angle BDA$ и $\angle ABC + \angle ADC = 190°$. (Напомним, что углом между прямыми считается наименьший из углов, образованных этими прямыми)

*Ответ:* 85.

*Решение:* Пусть $O$ - точка пересечения диагоналей. Тогда $\angle AOB = 180° - \angle OAB - \angle OBA = 180° - \angle OBC - \angle OBA = 180° - \angle ABC$. Аналогично $\angle COD = 180° - \angle ACD$. Углы $\angle AOB$ и $\angle COD$ равны как вертикальные. А значит $\angle AOB = \dfrac{\angle AOB + \angle COD}{2} = \dfrac{180° - \angle ABC + 180° - \angle ACD}{2} = \dfrac{360° - (\angle ABC + \angle ACD)}{2} = \dfrac{360° - 190°}{2} = 85°$

**1.2.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями, если $\angle BAC = \angle CBD, \angle ACD = \angle BDA$ и $\angle ABC + \angle ADC = 200°$. (Напомним, что углом между прямыми считается наименьший из углов, образованных этими прямыми)

*Ответ:* 80.

**1.3.** Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Найдите угол между его диагоналями, если $\angle BAC = \angle CBD, \angle ACD = \angle BDA$ и $\angle ABC + \angle ADC = 210°$. (Напомним, что углом между прямыми считается наименьший из углов, образованных этими прямыми)

*Ответ:* 75.

**2.1.** Первая цифра пятизначного числа равна остатку от деления этого числа на 2, вторая — остатку от деления этого числа на 3, третья — остатку от деления этого числа на 4, четвёртая — остатку от деления этого числа на 5, пятая — остатку от деления этого числа на 6. Найдите все такие числа. Напомним, что первая цифра числа не может быть нулём.

*Ответ:* 11311.

*Решение:* Пусть число $\overline{abcde}$ подходит под условие, тогда $a = 1$, тк это единственный ненулевой остаток при делении на 2, тогда последняя цифра числа $e$ - нечетная. При этом $e$ - остаток при делении на 6, значит $e = 1, 3$ или 5. Разберем эти три случая.
Пусть $e = 5$, тогда $d = 0$, тк число поделилось на 5. Цифра $c = 1$, потому что число оканчивающееся на 05 дает остаток 1 при делении на 4. Получилось число $\overline{1b105}$, которое ни при каком $b$ не дает остаток $b$ при делении на 3.
Пусть $e = 3$, тогда $d = 3$, потому что число оканчивающееся на 3 дает остаток 3 при делении на 5, а $c = 1$, потому что число оканчивающееся на 33 дает остаток 1 при делении на 4. Получилось число $\overline{1b133}$, которое ни при каком $b$ не дает остаток $b$ при делении на 3.
Пусть $e = 1$, тогда $d = 1$, а $c = 3$, потому что число оканчивающееся на 11 дает остаток 3 при делении на 4. Получилось число $\overline{1b311}$. Остаток при делении на 6 этого числа

равен 1, тогда при делении на 3 остаток также равен 1. Число 11311 подходит под условие.

**2.2.** Первая цифра пятизначного числа равна остатку от деления этого числа на 2, вторая — остатку от деления этого числа на 6, третья — остатку от деления этого числа на 5, четвёртая — остатку от деления этого числа на 4, пятая — остатку от деления этого числа на 3. Найдите все такие числа. Напомним, что первая цифра числа не может быть нулём.

*Ответ:* 11131.

**3.1.** У коллекционера есть 15 красных и 10 зеленых карточек. Он может совершать четыре обмена:

- 1 красную и 1 зеленую обменять на 3 зеленые,
- 1 красную и 1 синюю обменять на 3 синие,
- 1 зеленую и 1 красную на 1 синюю,
- 1 зеленую и 1 синюю на 1 красную.

Коллекционная колода состоит из 1 красной, 2 зеленых и 3 синих карточек. Какое наибольшее количество колод сможет собрать коллекционер?

*Ответ:* 5.

*Решение:* При любом обмене коллекционер меняет 1 красную карточку на не более чем на 2 карточки другого цвета, при этом для получения красной карточки коллекционер теряет 2 карточки другого цвета. Значит количество потерянных карточек красного цвета не меньше, чем удвоенное количество полученных карточек другого цвета. Пусть составлено $x$ колод, тогда красных карточек не меньше, чем $x$, а цветных карточек получено не больше, чем $10+2(15-x)$. Для составления колоды нужно в 5 раз больше карточек другого цвета, чем красного, а значит $10+2(15-x) \geqslant 5x$, откуда $x \leqslant 5$. Пример: из одной зеленой и одной красной карточки делаем синюю, затем с помощью еще 7 красных карточек получаем 15 синих и еще с помощью одной красной карточки добавляем две зеленые. Итого у нас есть 6 красных, 11 зеленых и 15 синих карточек, из которых можно составить 5 колод.

**3.2.** У коллекционера есть 18 красных и 12 зеленых карточек. Он может совершать четыре обмена:

- 1 красную и 1 зеленую обменять на 3 зеленые,
- 1 красную и 1 синюю обменять на 3 синие,
- 1 зеленую и 1 красную на 1 синюю,
- 1 зеленую и 1 синюю на 1 красную.

Коллекционная колода состоит из 1 красной, 2 зеленых и 3 синих карточек. Какое наибольшее количество колод сможет собрать коллекционер?

*Ответ:* 6.

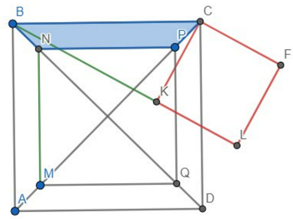
**3.3.** У коллекционера есть 22 красных и 14 зеленых карточек. Он может совершать четыре обмена:

- 1 красную и 1 зеленую обменять на 3 зеленые,
- 1 красную и 1 синюю обменять на 3 синие,
- 1 зеленую и 1 красную на 1 синюю,
- 1 зеленую и 1 синюю на 1 красную.

Коллекционная колода состоит из 1 красной, 2 зеленых и 3 синих карточек. Какое наибольшее количество колод сможет собрать коллекционер?

*Ответ:* 8.

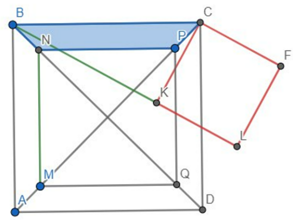
**4.1.** Квадраты $ABCD$ и $KLFC$ расположены так, что точки $B, K, L$ лежат на одной прямой. Точки $M$ и $P$ лежат на $AC$, точки $N$ и $Q$ - на $BD$ так, что $MNPQ$ также является квадратом (см. рисунок). Найдите площадь квадрата $KLFC$, если $MN = BK$, а площадь четырехугольника $BCPN$ равна 20.




*Ответ:* 80.

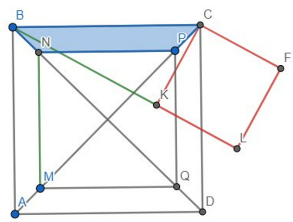
*Решение:* Заметим, что треугольник $BKC$ прямоугольный, тогда площадь искомого квадрата $CK^2 = BC^2 - BK^2 = BC^2 - MN^2$, т.е. равна разности площадей квадрата $ABCD$ и квадрата $NPQM$, которая равна учетверённой площади четырехугольнка $BCPN$, а именно равна $20 \times 4 = 80$.

**4.2.** Квадраты $ABCD$ и $KLFC$ расположены так, что точки $B, K, L$ лежат на одной прямой. Точки $M$ и $P$ лежат на $AC$, точки $N$ и $Q$ - на $BD$ так, что $MNPQ$ также является квадратом (см. рисунок). Найдите площадь квадрата $KLFC$, если $MN = BK$, а площадь четырехугольника $BCPN$ равна 19.




*Ответ:* 76.

**4.3.** Квадраты $ABCD$ и $KLFC$ расположены так, что точки $B, K, L$ лежат на одной прямой. Точки $M$ и $P$ лежат на $AC$, точки $N$ и $Q$ - на $BD$ так, что $MNPQ$ также является квадратом (см. рисунок). Найдите площадь квадрата $KLFC$, если $MN = BK$, а площадь четырехугольника $BCPN$ равна 21.



*Ответ:* 84.

**5.1.** Про пару натуральных чисел $x$ и $y$ известно, что $xy^2 + 7$ делится на $x^2y + x$. Чему может равняться сумма $x + y$? (Найдите все возможные варианты)

*Ответ:* 2, 4, 8, 14.

*Решение:* Раз $xy^2 + 7$ делится на $x^2y + x$, тогда $xy^2 + 7$ делится и на $x$. А значит, что 7 делится на $x$. Тогда $x = 1$ или 7. Рассмотрим оба случая:
Если $x = 1$, то $y^2+7$ делится на $y+1$, т.е $(y+1)^2-2(y+1)+8$ делится на $y+1$, значит $y = 1$, или 3, или 7.
Если $x = 7$, то $7y^2+7$ делится на $49y+7$, т.е. $y^2+1$ делится на $7y+1$, тогда и $49y^2+49$ делится на $7y+1$, т.е. $(7y+1)^2-2(7y+1)+50$ делится на $7y+1$. Слагаемое 50 делится на $7y + 1$ только при $y = 7$.

**5.2.** Про пару натуральных чисел $x$ и $y$ известно, что $xy^2 + 5$ делится на $x^2y + x$. Чему может равняться сумма $x + y$? (Найдите все возможные варианты)

*Ответ:* 2, 3, 6, 10.

**6.1.** $N$ собак участвует в конкурсе. Жюри выставляет каждой собаке три оценки за следующие параметры: длина шерсти, громкость лая и температура носа. Каждая оценка — это целое число от 0 до 7. Оказалось, что у любых двух собак оценки совпали не более чем по одному параметру. Найдите наибольшее возможное значение $N$.

*Ответ:* 64.

*Решение:* Заметим, что собак не более, чем $8^2$, иначе по первым двум признакам нашлась бы пара собак, имеющая одинаковую пару признаков, а значит, не подходящая под условие. Приведём пример на $8^2$: пусть собака получила x баллов за первый признак и y баллов за второй, тогда за третий признак она получит x+y (по модулю 8) баллов. Заметим, что собаки совпадающие ровно по одному из первых двух признаков получили разные значения в третьем признаке, а значит совпали не более, чем по одному признаку.

**6.2.** $N$ собак участвует в конкурсе. Жюри выставляет каждой собаке три оценки за следующие параметры: длина шерсти, громкость лая и температура носа. Каждая оценка — это целое число от 0 до 6. Оказалось, что у любых двух собак оценки совпали не более чем по одному параметру. Найдите наибольшее возможное значение $N$.

*Ответ:* 49.

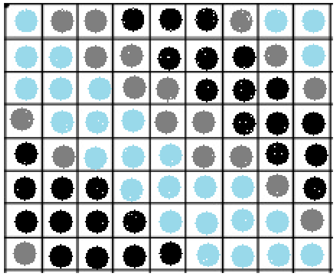
**6.3.** $N$ собак участвует в конкурсе. Жюри выставляет каждой собаке три оценки за следующие параметры: длина шерсти, громкость лая и температура носа. Каждая оценка — это целое число от 0 до 8. Оказалось, что у любых двух собак оценки совпали не более чем по одному параметру. Найдите наибольшее возможное значение $N$.

*Ответ:* 81.

**7.1.** В каждой клетке таблицы $8 \times 9$ стоит фишка одного из трех цветов: черная, белая или серая. Известно, что в каждой строке черных фишек не меньше, чем белых и не меньше, чем серых, а в каждом столбце белых фишек не меньше, чем черных и не меньше, чем серых. Какое наибольшее число серых фишек может быть в таблице?

*Ответ:* 18.

*Решение:* Заметим, что раз в каждой строке чёрных фишек не меньше, чем белых, а в каждом столбце белых не меньше, чем чёрных, то во всей таблице чёрных и белых фишек одинаковое количество. Тогда, т.к. черных фишек в строке не меньше, чем белых и серых, то их не меньше, чем 3 в каждой строке. Тогда чёрных фишек не меньше, чем 27. А значит и белых фишек не меньше, чем 27. Серых фишек соответственно не больше, чем 72 - 27 - 27 = 18. Приведём пример на 18:



**7.2.** В каждой клетке таблицы $9 \times 10$ стоит фишка одного из трех цветов: черная, белая или серая. Известно, что в каждой строке черных фишек не меньше, чем белых и не меньше, чем серых, а в каждом столбце белых фишек не меньше, чем черных и не меньше, чем серых. Какое наибольшее число серых фишек может быть в таблице?

*Ответ:* 18.

**7.3.** В каждой клетке таблицы $10 \times 11$ стоит фишка одного из трех цветов: черная, белая или серая. Известно, что в каждой строке черных фишек не меньше, чем белых и не меньше, чем серых, а в каждом столбце белых фишек не меньше, чем черных и не меньше, чем серых. Какое наибольшее число серых фишек может быть в таблице?

*Ответ:* 22.

**8.1.** В каждом из 60 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые весом в 9 г., в остальных настоящие - весом в 10 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 100 монет. Какого наименьшего количества взвешиваний заведомо хватит, чтобы определить мешок с фальшивыми монетами?

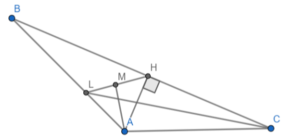
*Ответ:* 2.

*Решение:* За одно взвешивание определить мешок не получится, т.к. найдутся два мешка, из которых во взвешивании участвовало одинаковое количество монет, а значит эти два мешка окажутся неразличимыми. Покажем как найти фальшивый мешок за 2 взвешивания. Разобьем мешки на 5 групп: в 4 группах будет по 14 мешков, а в пятой 4 мешка. Возьмем по 1 монете из мешков 1 группы, по 2 монетам из мешков 2 группы, по 3 монетам из мешков 3 группы и по 4 монеты из мешков пятой группы. Всего взято $14 \cdot (1 + 2 + 3) + 4 \cdot 4 = 100$ монет, т.е. такое взвешивание допустимо. С помощью этого взвешивания мы определили группу мешков, в которых находится фальшивая монета. Определим теперь конкретный мешок внутри группы. Для этого возьмем 0 монет из 1 мешка, 1 монету из второго мешка, 2 монеты из третьего мешка и т.д. 13 монет из последнего мешка (это для группы из 14 мешков, для группы же из 4 мешков из последнего возьмем 3 монеты), всего монет взято $1 + 2 + ... + 13 < 100$.

**8.2.** В каждом из 64 мешков лежит по 20 монет: в одном мешке фальшивые весом в 8 г., в остальных настоящие - весом в 9 г. В нашем распоряжении весы, показывающие вес груза в граммах. Класть на весы можно не более 106 монет. Какого наименьшего количества взвешиваний заведомо хватит, чтобы определить мешок с фальшивыми монетами?

*Ответ:* 2.

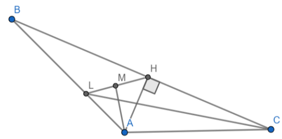
**9.1.** В треугольнике $ABC$ угол $A = 110°$, угол $C = 50°$, $AH$ — высота, $CL$ — биссектриса. Биссектриса угла $LAH$ пересекает отрезок $LH$ в точке $M$. Найдите угол $AMH$.




*Ответ:* 100°.

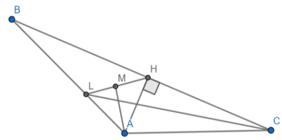
*Решение:* Пусть точка $X$ лежит на продолжении $CA$ за точку $A$, $\angle BAX = 180° - \angle BAC = 70°$. При этом $\angle LAH = \angle BAC - \angle HAC = \angle BAC - 90° + \angle ACH = 70°$, т.е. $AL$ - биссектриса внешнего угла $A$ треугольника $AHC$. Биссектриса $CL$ пересекается с биссектрисой внешнего угла $AL$ в точке $L$, значит $HL$ также является биссектрисой внешнего угла. Тогда $\angle LHA = 45°$, $\angle HAM = 35°$ и по сумме углов треугольника $\angle AMH = 180° - 45° - 35° = 100°$

**9.2.** В треугольнике $ABC$ угол $A = 130°$, угол $C = 10°$, $AH$ — высота, $CL$ — биссектриса. Биссектриса угла $LAH$ пересекает отрезок $LH$ в точке $M$. Найдите угол $AMH$.




*Ответ:* 110°.

**9.3.** В треугольнике $ABC$ угол $A = 100°$, угол $C = 70°$, $AH$ — высота, $CL$ — биссектриса. Биссектриса угла $LAH$ пересекает отрезок $LH$ в точке $M$. Найдите угол $AMH$.




*Ответ:* 95°.