

Разнойбой

1. В клетке $a1$ шахматной доски 8×8 стоит белая фишка, а в клетке $h8$ — черная. Белая фишка может ходить только вверх или вправо, а черная — только вниз или влево. Нельзя ходить на клетку, занятую другой фишкой, но фишка может пропускать ход любое число раз. Известно, что через некоторое время фишки поменялись местами. Докажите, что в процессе перемещения фишек был момент, когда прямая, соединяющая центры клеток, на которых стояли фишки, была перпендикулярна прямой, соединяющей центры клеток $a1$ и $h8$.
2. Стороны a , b и c некоторого треугольника удовлетворяют равенству $2(a^8 + b^8 + c^8) = (a^4 + b^4 + c^4)^2$. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.
3. Натуральные числа x и y таковы, что $k = \frac{4xy}{x+y}$ — целое нечетное число. Докажите, что у k есть хотя бы один натуральный делитель вида $4t + 3$.
4. Все углы восьмиугольника $ABCDEFGH$ равны, причем расстояние между прямыми AB и EF равно расстоянию между прямыми CD и GH . Докажите, что $AB + EF = CD + GH$.
5. Стража ловит забравшегося во дворец к султану Багдадского вора. Чтобы поймать вора, стражнику нужно оказаться с ним в одной комнате. Дворец состоит из 1000 комнат, соединенных дверьми. Планировка дворца такова, что путь между любыми двумя комнатами единственен. Стражникам не известно местоположение вора ни в какой момент (кроме момента поимки).
 - (a) Докажите, что при любой планировке дворца 10 стражников могут составить план действий, гарантирующий поимку вора.
 - (b) Докажите, что 5 стражникам это может не удалиться.
 - (c) Докажите, что для поимки заведомо достаточно 6 стражников.