

Инверсия

а вот что произошло дальше,
мы с вами сейчас и узнаем

Пескарь Иванович

Еще Пескарь Иванович настаивает на том, что задачи нужно сдавать с помощью инверсии и никак иначе!!!

- Опишите образ инверсии в следующих случаях:
 - Прямая касается окружности. Инверсия с произвольным положительным радиусом в точке касания. (b) Две окружности касаются. Инверсия с произвольным положительным радиусом в точке касания. (c) Две параллельные прямые. Инверсия с произвольным положительным радиусом в произвольной точке.
- Инверсия с центром в точке O и радиусом $R > 0$ переводит точки A и B в точки A' и B' . Докажите, что $A'B' = \frac{R^2}{OA \cdot OB} AB$.
 - Неравенство Птолемея.* Докажите, что для произвольной четверки точек A, B, C, D на плоскости выполнено неравенство $AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + AD \cdot BC$. В каких случаях достигается равенство?
- Две окружности пересекаются в точках X и Y . К ним проведены общие внешние касательные AB и CD . Докажите, что описанные окружности треугольников XAB и XCD касаются.
- Точки M, N — середины сторон AB и AC треугольника ABC соответственно. Окружности AMC и ANB пересекаются в точках A и P , а прямая AP пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке Q . Найти $AP : AQ$.
- Лемма Архимеда.** Окружность ω касается изнутри окружности Ω в точке S , а также хорды AB этой окружности в точке N . Докажите, что SN — биссектриса угла ASB .
 - В сегмент окружности ω вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Докажите, что общие касательные, проведенные ко всем таким парам окружностей через точку их касания, проходят через середину противоположного сегмента окружности ω .
- На плоскости проведена прямая l и отмечена точка A . На прямой l выбраны точки X, Y, Z . Докажите, что центры описанных окружностей треугольников AXY, AXZ и AYZ лежат на одной окружности с точкой A .
- Докажите, что в неравностороннем треугольнике одна из окружностей, касающихся вписанной и описанной окружностей внутренним образом, а одной из невписанных внешним образом, проходит через вершину треугольника.