

Разной по теории чисел

1. Дано натуральное число. Из него вычитается самое большое простое число, не превосходящее его. С результатом снова продлевается эта процедура и т.д. Докажите, что существует число, из которого ровно через 1000 шагов будет получен 0.
2. По кругу расставлены 100 натуральных чисел, никакие два из которых не делятся друг на друга. Между каждыми двумя числами (одновременно) вписывается результат от деления левого из них на их наибольший общий делитель, после чего исходные 100 чисел стираются. Эту операцию повторили несколько раз. Какое наибольшее количество единиц может теперь стоять вдоль круга?
3. Дано натуральное число N . Среди чисел от N^3 до $N^3 + N$ выбрали a чисел и покрасили в красный цвет, b чисел из оставшихся – в синий. Оказалось, что сумма красных делится на сумму синих. Докажите, что a делится на b .
4. Докажите, что для любых натуральных чисел a, b, c существует натуральное число k такое, что числа $a^k + bc, b^k + ca, c^k + ab$ имеют общий делитель, больший 1.
5. Даны различные натуральные числа a, b, c . Докажите неравенство:

$$\text{н.о.д.}(ab + 1, bc + 1, ac + 1) \leq \frac{a + b + c}{3}.$$

6. Натуральное число n таково, что число $2n - 1$ является простым. Докажите, что среди любых n различных чисел натуральных a_1, \dots, a_n найдутся два различных числа a_i и a_j с условием $\frac{(a_i + a_j)}{\text{НОД}(a_i, a_j)} \geq 2n - 1$.
7. Дано 54-значное число из нулей и единиц. Доказать, что его остаток от деления на число $33 \cdot 34 \cdot \dots \cdot 39$ не меньше 100000.