

Планарные графы

- 1. Формула Эйлера** Докажите, что для любого связного планарного графа выполняется равенство $V - E + F = 2$, где V - количество вершин, E - количество ребер, F - количество граней.
(Подсказка: докажите этот факт сперва для деревьев)
2. Петя поставил на бесконечный лист 15 точек и соединил их 25 непересекающимися линиями, причем от любой точки до любой другой можно добраться по линиям. Затем он сделал разрезы по получившимся линиям. На сколько частей распался лист?
3. Вася нарисовал на плоскости три отрезка, образующих треугольник, и разбил его пересекающимися только в концах отрезками на еще несколько треугольников. Докажите, что количество нарисованных отрезков будет в 1,5 раза больше, чем количество частей, на которые поделилась плоскость.
4. Докажите, что для графа с хотя бы 3 вершинами справедливо
 - (а) $2E \geq 3F$, если он планарный
 - (б) $E \geq 2F$, если он планарный и двудольный
 - (в) $E \leq 3V - 6$, если он связный и планарный
5. Наф-Наф, Нуф-Нуф и Ниф-Ниф построили 3 дома и 3 сарая. Можно ли так соединить каждый дом с каждым сараем тропинками, чтобы тропинки не пересекались?
6. Докажите, что полный граф на 5 вершинах не является планарным.
7. Докажите, что в любом планарном графе найдётся вершина степени не выше 5
8. Карта материка разделена на страны по некоторым линиям (можно считать, ломаным). Каждая страна представлена одним связным куском. Докажите, что можно составить 6 альянсов из этих стран так, чтобы страны из одного альянса не являлись соседями.
9. На плоскости проведено n различных окружностей так, что каждые две из них пересекаются в двух точках и никакие три из них не имеют общей точки. Докажите, что окружности разбивают плоскость на $n^2 - n + 2$ частей.