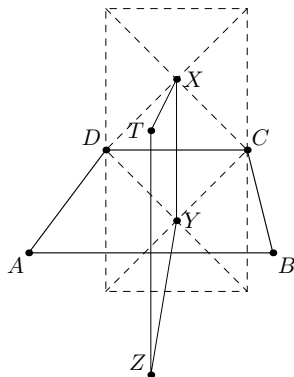


The Гомотетия

1. Внешние касательные к окружностям ω_1 и ω_2 пересекаются в точке O . Точки $A, B \in \omega_1$ и $C, D \in \omega_2$ таковы, что прямые AC и BD проходят через O , а отрезки AC и BD находятся вне окружностей ω_1 и ω_2 . Докажите, что точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

Дана трапеция $ABCD$. Точки X, Y, Z, T — центры квадратов, построенных на ее основаниях (см. рисунок).

2. Докажите, что у трапеций $ABCD$ и $XYZT$ диагонали пересекаются в одной точке и продолжения сторон пересекаются в одной точке.



3. Окружности ω и Ω касаются внешним образом окружности Γ в точках A и B соответственно. Общая внешняя касательная к ω и Ω пересекает их в точках C и D соответственно, причем ω, Ω и Γ лежат по одну сторону относительно CD . Докажите, что прямые AC и BD пересекаются на Γ .
4. В треугольнике ABC точка I — центр вписанной окружности, касающейся стороны BC в точке K , J — центр внеписанной в угол A окружности, касающейся стороны BC в точке M . Докажите, что прямые IM и JK пересекаются на высоте треугольника ABC .
5. В треугольнике ABC ω — вписанная окружность, Ω — внеписанная окружность, касающаяся AB . h — высота из вершины C на AB . $h \cap \omega = \{X, Y\}$, $h \cap \Omega = \{Z, T\}$, а точки $X - Y - Z - T$ располагаются именно в таком порядке. Окружность проходит через точки X и Z и пересекает AB в точках D и E . Докажите, что точки D, Y, E, T лежат на одной окружности.
6. Пусть Γ — окружность, l — прямая, касающаяся окружности Γ , а M — точка на l . Найдите геометрическое место всех точек P со следующим свойством: существуют две точки Q, R на l такие, что M — середина QR , а Γ — вписанная окружность треугольника PQR .
7. В треугольнике ABC пусть r_A — прямая, проходящая через середину BC и перпендикулярная внутренней биссектрисе $\angle BAC$. Аналогично определим r_B и r_C . Пусть H и I — ортоцентр и центр вписанной окружности ABC соответственно. Пусть три прямые r_A, r_B, r_C определяют треугольник Θ . Докажите, что центр описанной окружности Θ совпадает с серединой HI .